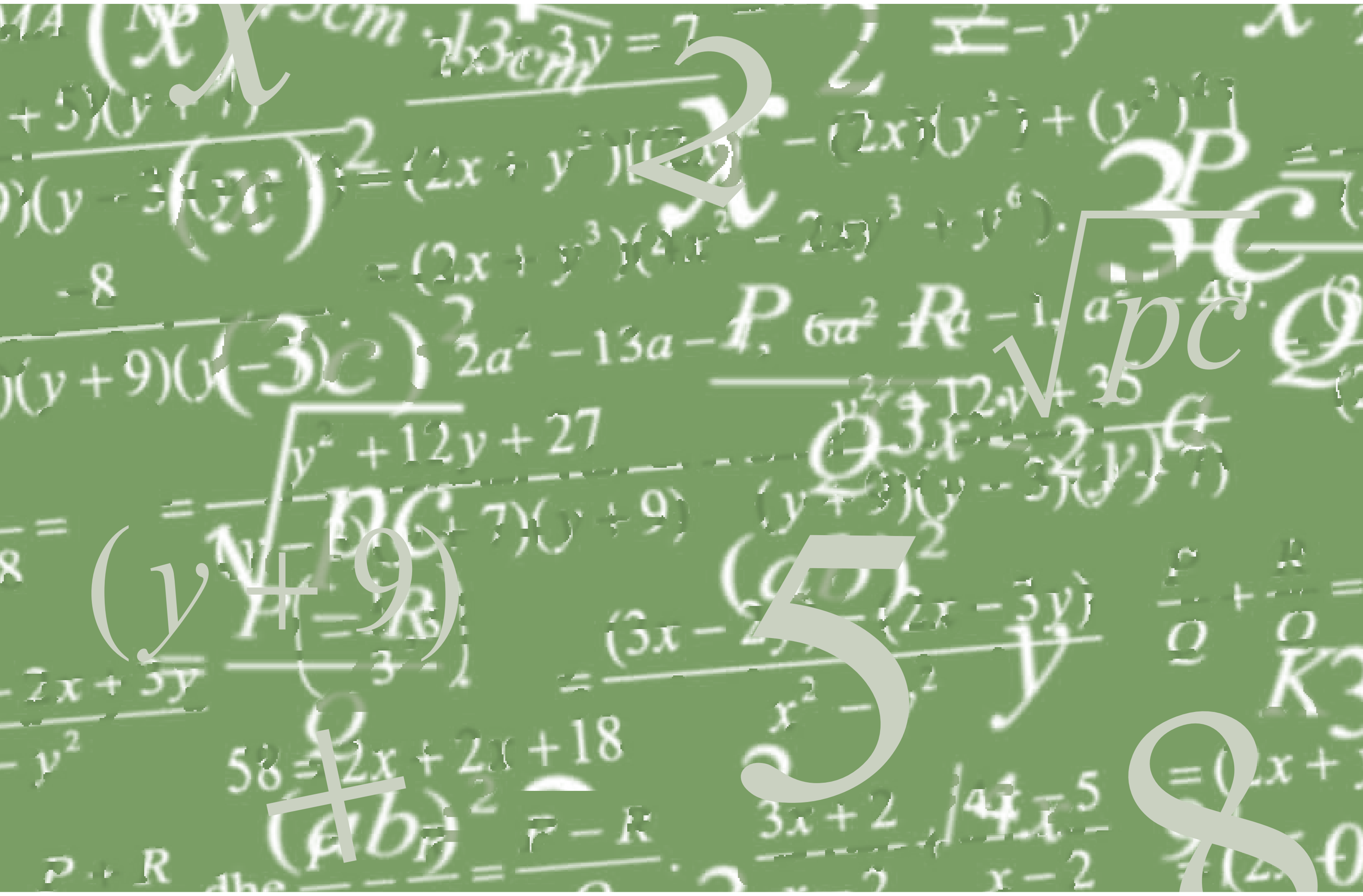
Republika e Kosovës
Republika Kosova – Republic of Kosovo
Qeveria - Vlada - Government

Ministria e Arsimit, Shkencës, Teknologjisë dhe Inovacionit
Ministarstvo obrazovanja, nauke,tehnologije i inovacije
Ministry of Education, Science, Technology and Innovation



Matematika dhe mësimdhënia e matematikës

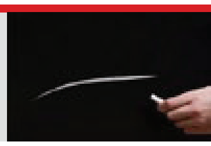
Udhëzues për klasat 6 - 9

Fakulteti i Edukimit

IHZhA

Matematika dhe mësimdhënia e matematikës

Udhëzues për klasat 6 - 9



Falënderim

Ky material është zhvilluar dhe publikuar për herë të parë nga Qeveria Gjermane përmes Deutsche Gesellschaft für Internationale Zusammenarbeit (GIZ) GmbH.

Teksti origjinal në gjuhën Shqipe [2011]
E drejta për përdorim, riprodhim dhe redaktim i është bartur Universitetit të Prishtinës - Fakultetit të Edukimit dhe Institutit për Hulumtime dhe Zhvillim të Arsimit [2023]

Përmbajtja e tekstit origjinal është përgjegjësi e autorëve dhe jo domosdoshmërisht pasqyron opinionin zyrtar të Deutsche Gesellschaft für Internationale Zusammenarbeit (GIZ) GmbH apo të Qeverisë Gjermane.

Autorë:
Mr. Sc. Melinda Mula – Eksperte për edukim, "Qendra për Arsim e Kosovës" Mbështetur nga Prof. Dr. Joachim Schroeder – Profesor në Departmentin e Shkencës së Edukimit, Universiteti Goethe, Frankfurt/Main

Koordinuar nga:
Rrezearta Zhinipotoku - Behluli, GIZ

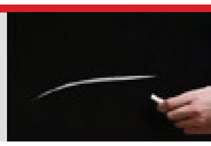
Dizajni dhe faqosja nga:
Envinion, Prishtinë

Dhjetor 2011, Prishtinë

german cooperation
DEUTSCHE ZUSAMMENARBEIT

Implemented by
giz Deutsche Gesellschaft für Internationale Zusammenarbeit (GIZ) GmbH

PËRMBAJTJA



Hyrje

Të jesh mësimdhënës është privilegj. Është privilegj të ndihmosh gjeneratat e reja të pajisen me njohuri dhe shkathtësi të nevojshme për t'u përballur me kërkesat e të sotmes dhe me sfidat e të ardhmes. Por, njëkohësisht ky është edhe obligim. Për të qenë në nivel të detyrës, mësimdhënësit duhet të kujdesen në mënyrë të vazhdueshme për zhvillimin profesional të tyre, në mënyrë që të informohen me risitë në sferën e arsimit dhe zbatimin e tyre në procesin mësimor.

Që nga viti 2000 në Kosovë janë implementuar shumë programe për zhvillimin profesional të mësimdhënësve. Pjesa më e madhe e tyre kanë qenë të fokusuara në aftësimin e mësimdhënësve për zbatimin e metodologjive të reja të mësimdhënies dhe të nxënit, ndërkaq përfitues të tyre ishin mësimdhënësit e lëndëve dhe niveleve të ndryshme të shkollimit.

Përkundër përpjekjeve të vazhdueshme, zbatimi i metodologjisë bashkëkohore në disa lëndë shoqërohej me probleme të shumta. Në veçanti, kjo vlen për lëndën e matematikës, kjo për arsye se programet e ofruara ishin të përgjithshme dhe nuk adresonin nevojat dhe karakteristikat specifike të kësaj lënde. Në anën tjetër, mungesa e programeve lëndore për zhvillim profesional të mësimdhënësve, e ekipeve profesionale të këshillimit në shkolla dhe sidomos mungesa e literaturës profesionale janë disa nga faktorët të cilët e vështirësuan edhe më shumë zbatimin e metodologjisë së re në lëndën e matematikës.

Përpjekja e parë në Kosovë për të ndihmuar mësimdhënësit e matematikës në zbatimin e metodologjive të reja bashkëkohore në klasa u bë në vitin 2004 me realizimin e programit të trajnimit "Strategjitë e reja të mësimdhënies dhe të nxënit në lëndën e matematikës". Në kuadër të këtij programi u përgatit një udhëzues, i cili shërbeu për aftësimin e 100 mësimdhënësve në mbarë Kosovën. Edhe pse realizimi i programit u bë me sukses dhe kishte kërkesa për vazhdimin e tij, mungesa e fondeve dhe moskujdesi i duhur institucional, bëri që ky program të mos ofrohej për mësimdhënësit e tjerë.

Rezultatet e ulëta në testet e arritshmërisë dhe në testet e maturës në lëndën e matematikës e aktualizuan sërish nevojën për zhvillim profesional të mësimdhënësve në këtë lëndë. Në vitin 2010, Bashkëpunimi Ndërkombëtar Gjerman (GIZ) filloi implementimin e projektit "Zhvillimi i Kapaciteteve në Sektorin e Arsimit Fillor në Kosovë", në kuadër të të cilit, ndër të tjera, ka paraparë edhe aftësimin e mësimdhënësve të matematikës të shkollave të mesme të ulëta. Për të realizuar me sukses programin e trajnimit, GIZ, në bashkëpunim me Qendrën për Arsim të Kosovës (KEC), zhvilluan udhëzuesin që e keni në dorë.

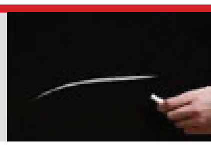
Ky udhëzues përbëhet nga dy pjesë kryesore. Në pjesën e parë janë dhënë informacione të përgjithshme mbi metodologjinë bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit, si dhe karakteristikat e zbatimit të saj në lëndën e matematikës. Përmes temave të shtjelluara në këtë pjesë, synohet që mësimdhënësve të matematikës t'u ofrohet informacion i nevojshëm rreth ndryshimeve kurrikulare në këtë lëndë, si dhe udhëzimet për organizimin e suksesshëm të procesit mësimor. Një kujdes i veçantë i është kushtuar shtjellimit të elementeve të rëndësishme që shoqërojnë mësimdhënësin në punën e tij të përditshme, siç janë: planifikimi i orës mësimore, organizimi i saj sipas strukturës ERR (Evokim, Realizim kuptimi dhe Reflektim), sqarimi i stileve të ndryshme të të nxënit, përzgjedhja e aktiviteteve dhe procedurave mësimore, si dhe zbatimi i formave të ndryshme të vlerësimit të nxënësve. Njohja e këtyre elementeve dhe zbatimi i tyre me sukses në procesin mësimor janë parakushte për realizimin e një mësimdhënie të suksesshme në klasa.

Në pjesën e dytë janë dhënë nga 5-6 modele mësimi për secilën nga klasat 6-9, si dhe një model testi për klasën e 8. Modelet e mësimit janë përgatitur për tema të ndryshme që shtjellohen në lëndën e matematikës, si p.sh. për temat nga algjebra, gjeometria, stereometria, probabiliteti etj. Kjo është bërë me qëllim që të tregohet se metodologjia bashkëkohore e mësimdhënies dhe të nxënit ka mundësi të zbatohet në çdo disiplinë matematikore. Modelet janë përgatitur për të shërbyer si udhëzues praktik për mësimdhënësit që dëshirojnë të zbatojnë në klasa metodologjinë bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit.

Në fund, libri përmban dhe shtojcën në të cilën janë dhënë mësimet nga tekstet shkollore 6-9, për të cilat janë punuar modelet e mësimit . Kjo është bërë me qëllim që lexuesve të librit t'iu lehtësohet puna duke iu ofruar në të njëjtin material mësimin e marrë nga teksti shkollor dhe përgatitjen metodologjike të tij.

Ky libër është përgatitur për të shërbyer si material bazë për organizimin e trajnimeve nga GIZ për aftësimin e mësimdhënësve të matematikës të klasave 6-9. Mirëpo, libri mund të shfrytëzohet edhe për të gjithë mësimdhënësit e tjerë, të cilët nuk kanë mundësi të marrin pjesë në trajnime, por janë të përkushtuar që të zbatojnë metodologjinë bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit në klasat e tyre. Po ashtu, libri mund të jetë me interes edhe për zyrtarë të arsimit, studentët dhe të gjithë ata të cilët dëshirojnë të njihen me zbatimin e metodologjisë bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit në lëndën e matematikës.

Autorja



PROGRAMI – MATEMATIKA DHE MËSIMDHËNIA E MATEMATIKËS PËR KLASAT 6-9

Synimi i Programit të trajnimit:

Aftësimi i mësimdhënësve të matematikës të klasave 6-9 për zbatimin e metodologjisë bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit në lëndën e matematikës me synim të ngritjes së rezultateve të të nxënit në këtë nivel të arsimit.

Qëllimet e Programit:

Me përvetësimin e këtij Programi pjesëmarrësit duhet të jenë në gjendje:

- Të zbatojnë në klasat e tyre metoda, teknika dhe strategji të ndryshme të mësimdhënies dhe të nxënit, të cilat lehtësojnë përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e kompetencave të nxënësve të parapara në Kornizën e Kurrikulit dhe rezultatet e të nxënit në lëndën e matematikës.
- Të përdorin aktivitete të shumëllojshme e të efektshme, të cilat ndihmojnë nxënësit në procesin e përvetësimit të koncepteve, rregullave dhe procedurave për zgjidhjen e detyrave të ndryshme në këtë lëndë.
- Të përshtasin mësimdhënien e tyre nevojave dhe mundësive të nxënësve, të bëjnë diferencimin e mësimdhënies përmes planifikimit të aktivitete për të gjithë nxënësit. Të ndihmojnë nxënësit në përvetësimin e qasjes së të nxënit të vetë-inicuar.
- Të konkretizojnë nocionet matematikore me shembuj nga jeta praktike duke mishëruar idenë se matematika ka zbatim të jashtëzakonshëm në jetën reale.
- Të përdorë teknologjinë si një "vegël" të rëndësishme të mësimdhënies dhe të nxënit. Të aftësojë nxënësit në hulumtimin e informacioneve të ndryshme në iternet, të cilat ndihmojnë të nxënit e koncepteve matematikore dhe zhvillimin e kompetencave të nxënësve në këtë lëndë.
- Të përdorin forma të ndryshme të vlerësimit të të nxënit të nxënësve, të cilat ndihmojnë vlerësimin objektiv të njohurive dhe kompetencave të përfituara nga ata.

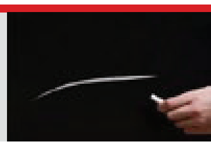
Përveç aftësimit të mësimdhënësve të matemattikës të klasave 6-9 për të zbatuar me sukses metodologjinë e re bashkkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit në këtë lëndë, ky program ofron mundësi edhe të freskimit të njohurive të mësimdhënësve rreth disa temave mësimore që janë interesante dhe janë pjesë e kurrikulumit të shkollave të mesme të larta. Këto tema janë prezantuar në fund të udhëzuesit dhe mësimdhënësit mund t'i shfrytëzojnë gjatë aktiviteteve extra-kurrikulare që organizojnë me nxënës.

Profili i Kompetencave të Mësimdhënësve

Ministria e Arsimit, e Shkencës dhe e Teknologjisë ka përgatitur profilin e kompetencave që një mësimdhënës duhet të ketë. Me anën e Programit “Matematika dhe mësimdhënia e matematikës për klasat 6-9” synohet të zhvillohen të mësimdhënësit kompetencat që kanë të bëjnë me Metodologjinë, Përmbajtjen akademike dhe Vlerësimin. Në tabelën e mëposhtme është dhënë përshkrimi i profilit të kompetencave të kategorive të përmendura, të aporvuara nga Këshilli Shtetëror për Licensimin e Mësimdhënësve.

METODOLOGJIA

KOMPETENCA		KOMPETENCA	
M01 Përshtatja	Përshtatë mësimdhënien dhe mesimnxenien në kontekst të mësimdhënies, Din të analizoje shumë faktorë në të njëjtën kohë Din të reagoje dhe të marrë vendimin e duhur në situata të ndryshme duke marrë vendime të arsyeshme për praktikën e mësimdhënies dhe për të mësuarit e nxënësve Din të reagojë në mënyrën e duhur në rrethana të ndryshme	M02 Aplikimi i kontekstit personal	Merr parasysh kontekstin personal të nxënësve dhe situatat mësimore U ndihmon nxënësve me probleme personale brenda kufijve të aftësive/mundësive profesionale
M03 Planifikimi	Është ne gjendje te shpjegoje qëllimin e planifikimit te aktiviteteve te gjithëmbarshme afatshkurtra, afatmesme dhe afatgjata Është ne gjendje ta zbërthejë kurrikulumin dhe rezultatet e dëshiruara në aktivitete te përshtatshme , kuptimplota për nxënësit Është ne gjendje te ndryshoje planet e punës për t'i përshtatur aktivitetet mësimore me nevojat dhe interesat e individëve dhe grupeve te nxënësve Është ne gjendje te zbatoje dhe përshtatë planet e punës dhe aktivitetet mësimore me nevojat dhe interesat e individëve dhe grupeve te nxënësve	M04 Plotësimi I nevojave të nxënësve	Është i/e vetëdijshme për nevojat e nxënësve për siguri fizike, sociale, kulturore e psikologjike Din si t'i angazhojë nxënësit në krijimin e rutinave ditore efektive në klasë Din si dhe kur të zbatojë strategji të ndryshme menaxhuese që kanë të bëjnë me ruajtjen e atmosferës mësimore, dhe që minimizojnë pengesat në të mësuarit e nxënësve
M05 Respekti	Respekton dinjitetin njerëzor të nxënësve Din të krijoje, me nxënës të ndryshëm, marrëdhënie pozitive nxënës-mësimdhënës që karakterizohen me respekt, besim dhe harmoni reciproke	M06 Diagnostifikimi i strategjive mësimore	Njeh një gamë të gjerë të qasjeve dhe strategjive mësimore të përshtatshme për nivelet e arsimit dhe disiplinat lëndore Din cilat strategji janë të përshtatshme për të ndihmuar nxënës të ndryshëm të arrijnë rezultate të pritshme



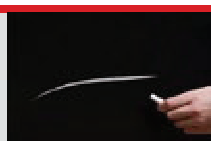
M07 Posedimi i një repertori strategjish	Njeh dhe aplikon një repertor të gjerë metodash dhe strategjish të praktikes se mësimdhënies	M08 Përdorimi i një repertori metodash	Posedon njohuri të thella për metodat e ndryshme të mësimdhënies dhe për mënyrat e organizimit të mësimit
M09 Inkorporomi i aktiviteteve mësimore	Ofron një shumëllojshmëri të aktiviteteve mësimore për plotësimin e nevojave të të gjithë nxënësve duke përfshirë nxënësit me nevoja të veçanta	M10 Përdorimi i shumë metodave	Përdorë një shumëllojshmëri metodash për angazhimin e nxënësve në mësim përmes bashkëpunimit
M11 Përdorimi i materialeve për mësimdhënie dhe mësiomnxënie	Kupton funksionin e te gjitha teknologjive dhe mjeteve (tradicionale/elektronike) për mësimdhënie dhe mësimnxënie Din si të përdorë dhe si të angazhojë nxënësit në përdorimin e këtyre teknologjive për të prezantuar përmbajtjen, për të komunikuar me të tjerët në mënyrë efektive, për të gjetur dhe siguruar informacione, për hulumtime, për përpunim të tekstit, për menaxhim të informacionit, dhe për të regjistruar/mbajtur shënime	M12 Përdorimi i burimeve nga shtëpia dhe komuniteti	E din se të mësuarit e nxënësve thellohet përmes përfshirjes se burimeve shtëpiake dhe të komunitetit Din si t'i identifikojë burimet relevante për objektivat e mësimdhënies dhe mësim-nxënies Din si t'i inkorporojë këto burime në mësimdhënie dhe në të mësuarit e nxënësve
M13 Përdorimi i modeleve të mësimdhënies	Kupton se ekzistojnë modele të ndryshme të mësimdhënies dhe mësim-nxënies dhe metoda të ndryshme për nxitjen e të mësuarit	M14 Përdorimi i nivelit të lartë të të menduarit	Posedon shkathtësi për vëzhgim, analizë dhe interpretim për ta përshtatur planifikimin dhe mësimdhënien me nevojat e grupit të nxënësve dhe me situatën
M15 Zbatimi i Taksonomisë së Bloom-it	Zhvillon shkathtësi te te menduarit të nivelit të lartë	M16 Balancimi i metodave	Balancon metodat tradicionale dhe të reja të mësimdhënies dhe te vlerësimit
M17 Kuptimi i sjelljes së grupeve	Kupton si funksionojnë grupet e nxënësve dhe njeh strategji për nxitjen e funksionimit efektiv te tyre	M18 Ekspozimi i punës	Është ne gjendje te krijoje një ambient stimulues në klasë duke ekspozuar punën e nxënësve, modele, piktura etj.
M19 Angazhimi i kontributit të nxënësve	Përfshin nxënësit në procese të vendimmarrjes dhe është konsistent në praktikë.	M20 Roli lehtësues	Vepron si lehtësues i te nxënit
M21 Arritja e lidhshmërisë	Krijon përvoja mësimore kuptimplota për nxënësit	M22 Përdorimi i qasjeve gjeneruese	Din si t'i thjeshtojë konceptet komplekse deri në nivelin e nevojshëm për grupin e caktuar të nxënësve
M23 Thjeshtësimi i koncepteve	Ka njohuri për mënyrat e thjeshta të mësimdhënies dhe mësim-nxënies së lëndës		

PËRMBAJTJA AKADEMIKE

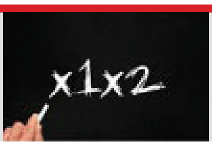
KOMPETENCA		KOMPETENCA	
PA01 Rë qenit në hap me specializimin	Është gjithmonë aktual në fushën lëndore të tij/saj Përfundon me sukses një program formal studimor që demonstron të kuptuar të thellë të përmbajtjes në një ose më shumë fusha të specializimit apo disiplina lëndore sipas sistemit arsimor në shkollat e Kosovës	PA02 Të qenit aktual	Është ne hap me zhvillimet dhe ndryshimet në fushën përkatëse te specializimit
PA03 Ruajtja e të kuptuarit të thellë	Posedon njohuri të thella akademike për fushat e specializimit	PA04 Hulumtimi	Din ku të gjejë dhe si të sigurojë njohuri/ ekspertizë për lëndën kur është e nevojshme
PA05 Zbatimi	Ka njohuri për lidhjet e lëndës me lëndët tjera dhe për rëndësinë e saj në jetën e përditshme si dhe për zbatimet		

VLERËSIMI

KOMPETENCA		SHËNIM	
V01 Vlerësimi për qëllime formative dhe sumative	Kupton qëllimet e vlerësimit të nxënësve Din si të vlerësojë gamen e gjerë të objektivave mësimore duke përzgjedhur dhe zhvilluar një shumëllojshmëri të teknikave dhe instrumenteve për vlerësim në klasë dhe në shkallë më të gjerë Analizon rezultatet e instrumenteve për vlerësim në klasë dhe jashtë saj për matjen e masave cilësore dhe sasiore të arritshmërisë Njeh dallimin mes vlerësimit sumativ dhe formativ Përdorë rezultatet për të përmirësuar të mësuarit e nxënësve	V02 Përdorimi i metodave të ndryshme të vlerësimit	Njeh dhe përdor një shumëllojshmëri metodash për vlerësimin e nxënësve
V03 Përdorimi i proceseve vëzhguese	Përveç testit me gojë dhe shkrim duhet të përfshihet edhe vëzhgimi i nxënësve gjatë punës në grupe, vlerësimi i punës në projekte dhe shkathtësive të punës ekipore, vlerësimi i shkathtësive të komunikimit dhe fushave të tjera	V04 Përdorimi i strategjive të ndryshme vlerësuese	Ka njohuri të duhura për teknika të ndryshme për monitorim dhe vlerësim të të mësuarit



V05 Njohja e vazhdueshme e kapacitetit të nxënësit	Monitoron nxënësit në vazhdimësi për të identifikuar nevojat, anët e forta, anët e dobëta, interesat e tyre dhe progresin mësimore individual	V06 Ndjekja e parimeve	Kupton parimet dhe standardet e vlerësimit dhe monitorimit
V07 Përdorimi i vlerësimit formativ	Përmirëson në vazdimësi mësimdhënien dhe mbështet nxënësit në të mësuarit e tyre, në bazë të rezultateve të vlerësimit	V08 Dokumentimi	Vlerëson, mban shënime dhe raporton për shkathtësitë, nevojat e nxënësve dhe për zhvillimin individual të tyre
V09 Ruajtja e transparencës	Siguron se kriteret për kërkesat mësimore dhe për vlerësim janë transparente për nxënësit	V10 Proceset e vlerësimit	Vlerëson jo vetëm rezultatet e të nxënit por edhe proceset e të mësuarit
V11 Komunikimi me prindër	Rregullisht u komunikon prindërve rezultatet e vlerësimit të nxënësve		



Matematika dhe mësimdhënia e matematikës

> “Matematika është mbretëresha e shkencave.”
>
> **Carl Friedrich Gauss**

Gjurmët e matematikës janë të hershme. Zhvillimi i saj ka filluar në Egjiptin e lashtë, ka vazhduar në Mesopotami, Indi, Kinë, Greqinë antike, vendet islamike dhe më vonë është përhapur në mbarë botën. Dokumentet e para të shkruara Rhind Mathematical Papirus datojnë që nga vitet 2000 para erës së re, ndërsa studimi i saj si shkencë në vete filloi në Greqi në shekullin e 6 para erës së re. Nga këtu ka origjinën fjala “Matematikë”, e cila në Gjuhën antike Greke ka kuptimin e dijes, të studimit dhe të nxënit. Me këtë shprehje në Greqinë antike janë identifikuar dijetarët, të cilët kanë fituar njohuri për zgjidhjen e problemeve të ndryshme nga aritmetika dhe gjeometria përmes procesit të të nxënit dhe studimit.

Për shkak të natyrës komplekse të fushës së studimit të matematikës, në kohën tonë nuk ekziston një përkufizim i vetëm për të. Disa nga përkufizimet më të njohura janë:

- Matematika merret me studimin e sasive, strukturave, hapësirave dhe ndryshimeve. Matematikanët shqyrtojnë modelet dhe formulojnë supozime të reja. (Wikipedia)
- Matematika është shkenca e numrave dhe e operacioneve, e marrëdhënieve, e kombinimeve, e përgjithësimeve dhe e abstraksioneve të tyre, si dhe e konfigurimeve hapësinore, e strukturave, e masave, e transformimeve dhe e përgjithësimeve të tyre. (Merriam-Webster Dictionary)
- Matematika është shkenca mbi strukturën, procedurat dhe marrëdhëniet që kanë evoluar nga numërimi, matjet dhe përshkrimi i formave të objekteve. Ajo merret me të kuptuarit logjik dhe llogaritjet sasiore. Që nga shekulli XVII ajo ka qenë ndihmë e domosdoshme për shkencat fizike dhe teknologjinë, aq sa është konsideruar gjuha themelore e shkencës. (Enciklopedia Britannica)

Duke pasur parasysh elementet e përbashkëta të përkufizimeve të ndryshme për matematikën, në shumë burime është dhënë një përkufizimi më i përgjithshëm i saj:

“Matematika është bazë e dijes, e cila ka në qendër konceptet që kanë të bëjnë me sasinë, strukturën, hapësirën dhe ndryshimet, si dhe disiplinat akademike që i studiojnë ato”.

Disiplina e cila merret me studimin e sasisë është aritmetika, ajo që merret me studimin e strukturës është algjebra, ndërsa disiplinat që merren me studimin e hapësirës dhe ndryshimeve janë përkatësisht gjeometria dhe analiza. Për lehtësi studimi, të gjitha këto disiplina ndahen në nëndisiplina, siç është shembulli me algjebrën, e cila ndahet në algjebrën abstrakte që merret me studimin e strukturave algjebrike, në algjebrën lineare e cila merret me studimin e hapësirave vektoriale, etj.

Gjatë shekujve, matematikanët kanë analizuar konceptet matematike dhe marrëdhëniet ndërmjet tyre. Duke u bazuar në punën e trashëguar nga paraardhësit e tyre, si dhe rezultatet e punës individuale apo në grup, matematikanët kanë arritur të formulojnë supozime dhe rregulla të ndryshme, si dhe të vërtetojnë ato duke kontribuuar në zhvillimin e matematikës. Si rezultat i punës së vazhdueshme, matematikanët arritën të vendosin edhe themelet e ndërtimit aksiomatik të disiplinave të ndryshme matematike.

Një zhvillim i tillë i ndihmoi matematikanët që duke u bazuar në aksiomatikën e caktuar të formulojnë rregullat e reja dhe t'i vërtetojnë ato në mënyrë deduktive përmes përdorimit të abstraksionit dhe rezonimit logjik. Kjo qasje përshpejtoi zhvillimin e përgjithshëm të matematikës dhe të disiplinave të saj. Natyrën aksiomatike të ndërtimit të matematikës më së miri mund ta kuptojmë duke analizuar përkufizimin që Benjamin Pierce e ka dhënë për matematikën. Në shënimet e tij, ai e përkufizon matematikën si "shkenca e cila nxjerrë përfundimet e nevojshme". Pra, njohësit e matematikës arrijnë që të ndërtojnë të kuptuarit e tyre duke u bazuar në disa koncepte matematikore, të cilat pastaj arrijnë t'i zgjerojnë duke nxejrrë përfundime të ndryshme përmes rezonimit logjik.

Po si të ndihmohen nxënësit për t'i përvetësuar këto koncepte dhe mënyrën e nxjerrjes së përfundimeve?

Me këtë pyetje në mënyrë të vazhdueshme preokupohen të gjithë hartuesit e kurrikulave, të planeve dhe programeve mësimore, të teksteve shkollore të lëndës së matematikës, si dhe hulumtuesit e aspekteve të ndryshme të mësimdhënies së kësaj lënde. Mbi të gjitha, kjo pyetje preokupon mësimdhënësit, të cilët, duke qenë në kontakt të drejtpërdrejt me nxënësit, mbajnë përgjegjësinë kryesore për aftësimin e tyre në këtë lëndë.

Gjatë gjithë kohës, synim i të gjithë mësimdhënësve dhe ekspertëve të kësaj lënde ka qenë dhe vazhdon të jetë gjetja e metodave më të përshtatshme për mësimdhënien e matematikës. Pa marrë parasysh periudhën kohore dhe metodat e përdorura, parimet kryesore në të cilat është mbështetur shtjellimi i lëndës së matematikës kanë qenë thjeshtimi i prezantimit të koncepteve, lehtësimi i procedurave të zgjidhjes së problemeve, si dhe konkretizimi përmes shembujve nga jeta reale. Kjo është bërë me qëllim që të lehtësohet përvetësimi i njohurive nga ana e nxënësve, si dhe zhvillimi i shkathtësive e shprehive të tyre për të zbatuar njohuritë e fituara në zgjidhjen e problemeve nga jeta reale. Rezonimi logjik dhe qasja sistematike në zgjidhjen e problemeve që e karakterizon matematikën është konsideruar si atribut i rëndësishëm për krijimin e modeleve të përshtatshme për zgjidhjen e detyrave në shkencat e tjera dhe në jetën reale në përgjithësi. Rëndësia e matematikës në zhvillimet e shkencave të tjera është theksuar që në kohën e Gausit, i cili matematikën e quan "Mbretëresha e shkencave".

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Ekzistojnë qasje të ndryshme të mësimdhënies, të cilat përdoren në shtjellimin e lëndës së matematikës. Ato mund të grupohen në dy kategori të mëdha: në qasjen tradicionale dhe atë bashkëkohore. Qasja tradicionale bazohet në metodat e mësimdhënies së drejtpërdrejt të cilat kanë në qendër mësimdhënësin, ndërsa ajo bashkëkohore mbështetet në metodat, strategjitë dhe teknikat e mësimdhënies dhe të nxënit të cilat favorizojnë hulumtimin dhe ndërtimin e informacionit përmes pjesëmarrjes aktive të nxënësve në procesin mësimor.

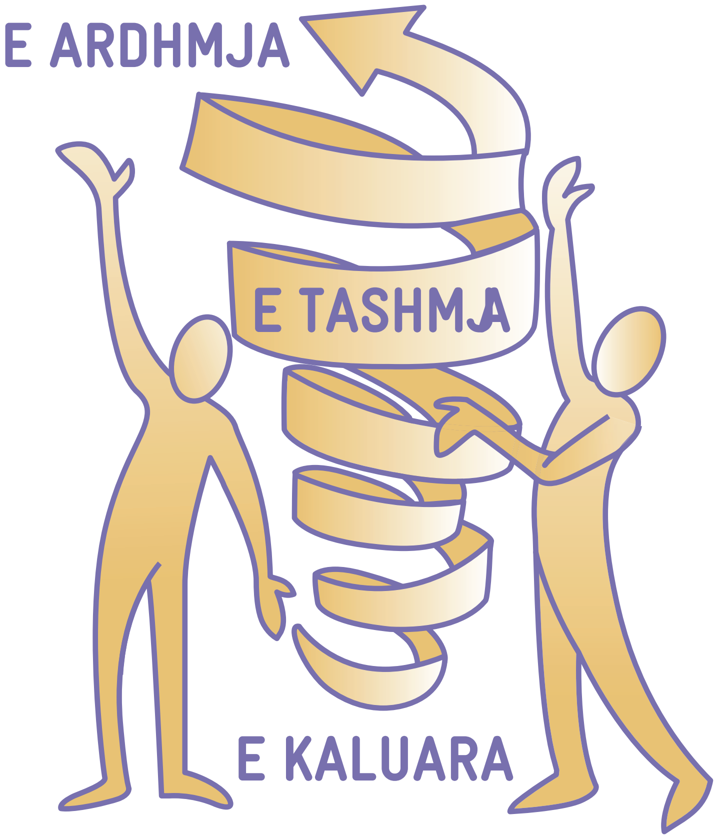
Disa nga karakteristikat e qasjes tradicionale dhe asaj bashkëkohore janë:

QASJA TRADICIONALE	QASJA BASHKËKOHORE
Mësimdhënësi është burim i vetëm i informacionit.	Ka disa burime të informacionit: mësimdhënësi, nxënësit, materialet e ndryshme që mund të përdoren.
Mësimdhënësi fokusohet më shumë në realizimin e planit dhe programit mësimor se sa në nevojat, kërkesat dhe interesimet e nxënësve.	Mësimdhënësi ka prioritet nevojat, kërkesat dhe interesimet e nxënësve, si dhe përfshirjen e tyre me rastin e reazlimit të planit dhe programit mësimor.
Fokusohet në mënyrën e dhënies së informacionit nga ana e mësimdhënësit duke i dhënë rëndësi transmetimit të tij.	Fokusohet në mënyrë e përfitimit të informacionit nga ana e nxënësve duke i dhënë rëndësi kuptimit të informacionit nga ana e tyre.
Bazohet në të nxënit pasiv nga ana e nxënësve duke i dhënë rëndësi riprodhimit të njohurive.	Bazohet në të nxënit aktiv nga ana e nxënësve duke i dhënë rëndësi reČektimit rreth të nxënit.
Kontribuon në zhvillimin e konformitetit dhe mënyrës së të nxënit e cila bazohet në miratim.	Kontribuon në zhvillimin e autonomisë së nxënësve dhe mënyrës së pavarur të tyre për të nxënë.

Metodat kryesore të mësimdhënies së drejtpërdrejt janë ligjërimi dhe demonstrimi. Edhe pse këto metoda i takojnë qasjes tradicionale të mësimdhënies, përdorimi i tyre me kujdes në matematikë është me vlerë. Ligjërimet e shkurtra, dhe, aty ku ka mundësi, të përcjella me demonstrim, janë të përshtatshme për t'u përdorur në matematikë sidomos në rastet e prezantimit të fakteve, përkufizimit të nocioneve, mësimit të rregullave, konkretizimit të objekteve matematikore, si dhe gjatë ndërtimit të shkathtësive të nxënësve për të zgjidhur probleme të ndryshme. Përdorimi i këtyre metodave është mjaft efikas sidomos kur ato planifikohen mirë, kombinohen me metodat e qasjes bashkëkohore të mësimdhënies dhe janë në funksion të motivimit të nxënësve për të nxënë.

Përpjekja për të shtuar suksesin e nxënësve në përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive motivoi shumë edukatorë të hulumtojnë mënyrën e të mësuarit të fëmijëve dhe të propozojnë metoda efikase të mësimdhënies dhe të nxënit. Si rezultat i punës kërkimore të tyre sot ekzistojnë disa teori të reja të të nxënit, si: bihejviorizmi, kognitivizmi, konstruktivizmi, etj. Të gjitha këto teori sqarojnë se fëmijët që nga lindja janë agjentë aktivë në përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive. Ato mbështesin idenë se fëmijët më së miri mësojnë përmes ndërveprimit me mjedisin në të cilin jetojnë. Këto fakte duhet të shfrytëzohen nga mësimdhënësit e matematikës, të cilët me rastin e sqarimit të nocioneve të ndryshme duhet të kërkojnë paraprakisht nga nxënësit rikujtimin e njohurive që kanë rreth tyre, si dhe sqarimin e nocioneve ta lidhin sa më shumë që të jetë e mundur me objektet dhe fenomenet nga jeta reale që na rrethon.

Njëra nga teoritë më të reja të të nxënit është konstruktivizmi. Kjo teori mbështet idenë se njerëzit ndërtojnë të kuptuarit dhe njohuritë e tyre për botën përmes përvojës së tyre dhe reflektimit mbi këto përvoja. Sipas konstruktivistëve përftimi i njohurive të reja organizohet sipas një spiraleje. Paranjohuritë dhe përvojat e njerëzve janë bazë e mirë për të ndërtuar në mënyrë të qartë informacionet e reja, ndërsa reflektimi rreth informacionit të ri ndihmon përforcimin e tij duke i kontribuar qëndrueshmërisë. Një qasje e tillë është shumë funksionale për sqarimin e shumë nocioneve matematike, si dhe për përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive në këtë lëndë. Rikujtimi i njohurive të mëparshme rreth një koncepti në matematikë krijon një bazë të mirë për të ndërtuar mbi të njohuritë e reja, të cilat pastaj mund të përforcohen dhe të bëhen të qëndrueshme përmes zgjidhjes së detyrave të ndryshme.



Meqë teoria konstruktiviste mbështet ndërtimin e informacionit nga ana e nxënësve, atëherë zbatimi i saj në klasa mund të realizohet përmes metodave, teknikave dhe strategjive të reja të mësimdhënies dhe të nxënit të cilat kanë në qendër nxënësin. Metodat, teknikat dhe strategjitë e tilla ofrojnë mundësinë e përfshirjes aktive të nxënësve në procesin mësimor, të cilët gjatë aktiviteteve të ndryshme arrijnë të ndërtojnë të kuptuarit e tyre kryesisht përmes formulimit të pyetjeve, dhënies së përgjigjeve, diskutimeve, debateve, shpjegimeve, zgjidhjes së problemeve, shqyrtimit të zgjidhjeve, prezantimit të punës së grupeve ose të rezultateve të projekteve të ndryshme, etj. Të gjitha këto aktivitete mund të zbatohen me sukses në mësimdhënien e matematikës. Përfshirja e aktiviteteve të tilla në procesin mësimor e bën matematikën më dinamike, më interesante, më të afërt me nxënësit dhe interesimet e tyre, më të pëlqyeshme për ta mësuar, si dhe më të lehtë për ta zbatuar.

Përveç këtyre përparësive, hulumtimet kanë treguar se metodat, teknikat dhe strategjitë me nxënësin në qendër janë superiore në krahasim me metodat e qasjes tradicionale për sa i përket: përgatitjes së nxënësve për t'u ballafaquar me informacionin e ri dhe shqyrtimin e tij nga këndvështrime të ndryshme, gjetjes së argumenteve, shfrytëzimit të burimeve të ndryshme të informacionit, aftësimit të tyre për zgjidhjen e problemeve, zhvillimit të mendimit kritik, rritjes së besimit të nxënësve për aftësitë e tyre individuale, etj. Po ashtu, hulumtimet kanë treguar se përdorimi i metodave, teknikave dhe strategjive të reja i kontribuon edhe formimit të qëndrimit pozitiv të nxënësve ndaj lëndëve të ndryshme, gjë shumë e nevojshme sidomos për lëndën e matematikës. Duke u bazuar në këto hulumtime arrijmë në përfundimin se mësimdhënia e cila angazhon nxënësit aktivisht në ndërtimin e të kuptuarit është shumë më efikase se cilido model i përgatitur nga mësimdhënësi, prandaj është me vlerë përdorimi i tyre.

Mësimdhënia e suksesshme

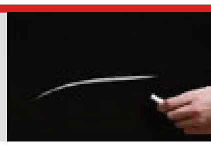
> Mësimdhënësi mediokër tregon.
> Mësimdhënësi i mirë shpjegon.
> Mësimdhënësi superior demonstron.
> Mësimdhënësi madhështor inspiron.
>
> **W. A. Ward**

Në mesin e mësimdhënësve dallohen disa, të cilët japin përshtypjen se janë të lindur për këtë profesion. Mësimdhënësit e tillë kanë sukses jo vetëm me një gjeneratë të nxënësve, por me të gjitha. Nxënësit e tyre u janë mirënjohës edhe pas shumë viteve të përfundimit të shkollimit. Ku qëndron fshehtësia e suksesit të këtyre mësimdhënësve dhe a mund t'ju mësohet ajo mësimdhënësve të tjerë?

Është mendim i përgjithshëm se faktori kryesor që e bën një mësimdhënës të suksesshëm është dashuria ndaj profesionit. Një mësimdhënës që e ushtron profesionin me dëshirë është një kërkues, i cili investon në profesionalizmin e vazhdueshëm të tij. Një mësimdhënës i tillë është i gatshëm të përcjellë me vëmendje ndryshimet e përmbajtjeve lëndore dhe të metodologjisë së punës, të provojë zbatimin e tyre në klasa, të reflektojë risitë e zbatuara me kolegët, si dhe të organizojë mësimdhënien mbi bazën e mësimeve të mësuara dhe nevojave të nxënësve.

Sot nuk ka një listë përfundimtare e cila përmban karakteristikat e një mësimdhënësi të suksesshëm. Mirëpo, nga hulumtimet e ndryshme mund të konkludohet se disa nga ato janë: dija dhe pasioni për lëndën, komunikimi i qartë, të qenit kreativ, respektimi i nxënësve dhe nevojave specifike të tyre, motivimi i nxënësve për të nxënë, etj. Mësimdhënës i suksesshëm konsiderohet personi, i cili ka besim se çdo nxënës mund të mësojë dhe që inkurajon secilin prej tyre për të nxënë. Sipas një thënie hebraike "Një nxënës nuk është një enë për t'u mbushur, por një llambë për t'u ndezur", mund të nxjerrim përfundimin se mësimdhënësi i suksesshëm i konsideron nxënësit si "llamba", ndërsa veten me fat për t'i ndezur ato.

Zhvillimet jashtëzakonisht të shumta teknike dhe teknologjike që po ndodhin në çdo sferë të jetës kanë parashtruar para mësimdhënësve kërkesa të reja. Meqë është e pamundur që nxënësit të ballafaqohen me fluksin e madh të informacioneve, sot mësimdhënësve u kërkohet që t'i kushtojnë kujdes udhëheqjes së nxënësve për të përvetësuar njohuritë e domosdoshme, ndërsa të fokusohen më shumë në zhvillimin e kompetencave të nxënësve për të pasur sukses në punë dhe jetë. Mësimdhënësve u këshillohet që të mos iu japin nxënësve përgjigjet e gatshme, por t'i aftësojnë ata për të nxënë në mënyrë të pavarur, për të hulumtuar përgjigjet, për të provuar rrugë të ndryshme të zgjidhjes së problemeve dhe për të diskutuar rezultatet. Pra, nga mësimdhënësit sot kërkohet që ”nxënësve të mos t'iu japin peshq, por që t'i mësojnë ata të peshkojnë". Meqë historikisht lënda e matematikës është konsideruar e vështirë nga pjesa më e madhe e nxënësve, mësimdhënësi i matematikës përveç të tjerave duhet t'i kushtojë kujdes edhe kultivimit të dëshirës së nxënësve për të mësuar këtë lëndë.

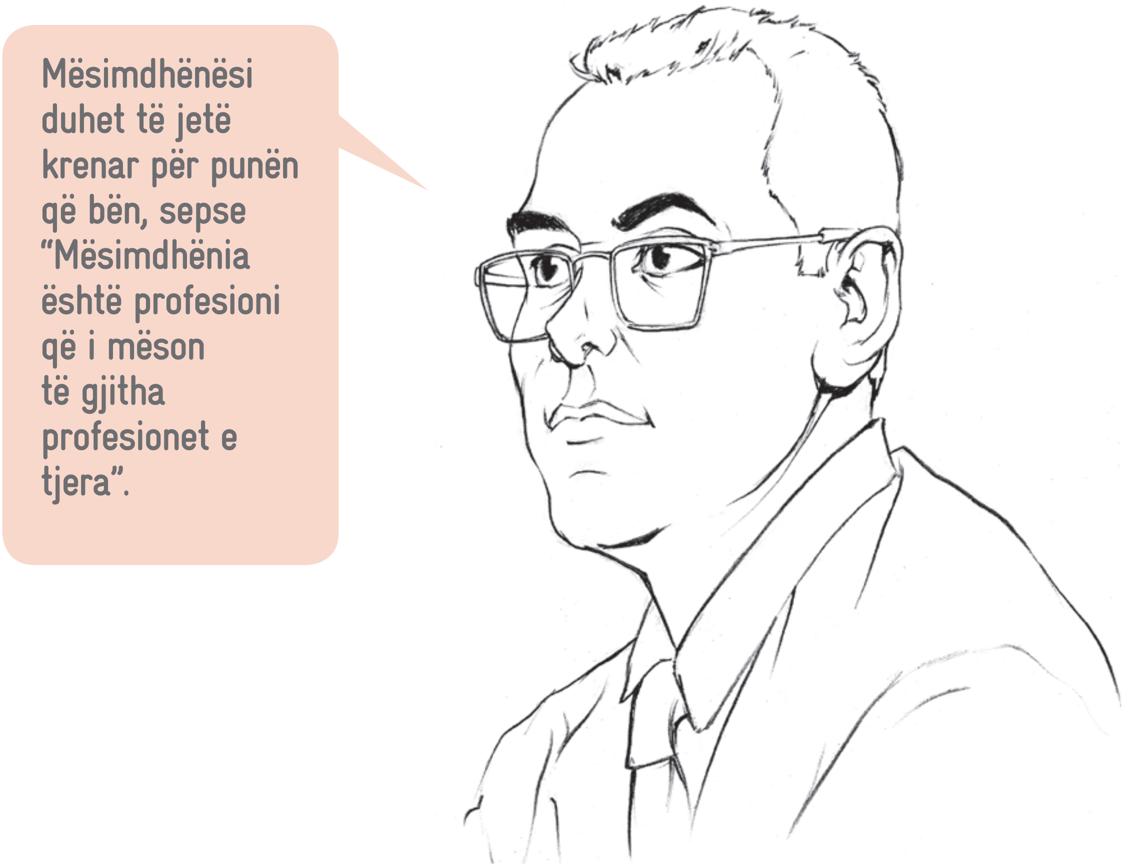


Për ta arritur sukses në procesin mësimor disa nga veprimet që një mësimdhënës i matematikës duhet të ndërmarrë janë:

- Të shprehë besimin se çdo nxënës mund ta mësojë lëndën.
- Të përcaktojë ku dhe pse nxënësit kanë vështirësi në të nxënë.
- Të përshtatë mësimdhënien e tij nevojave dhe mundësive të nxënësve të bëjë diferencimin e mësimdhënies përmes planifikimit të aktivitete për të gjithë nxënësit.
- Të inkurajojë nxënësit në përpjekjet e tyre për ta mësuar matematikën.
- Të komunikojë në gjuhën (përdorimin e terminologjisë) që është e kuptueshme për nxënësit.
- Të përdorë metoda teknika dhe strategji të ndryshme të mësimdhënies dhe të nxënit të cilat lehtësojnë përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e kompetencave të nxënësve.
- Të zgjedhë detyra që janë në përputhje me interesimet e nxënësve.
- Të konkretizojë nocionet me shembuj nga jeta praktike duke mishëruar idenë se matematika ka zbatim të jashtëzakonshëm në jetën reale.
- Të përdorë teknologjinë si një "vegël" të rëndësishme të mësimdhënies dhe të nxënit.
- Të përgëzojë nxënësit për suksesin e arritur.

Kjo listë nuk është përfundimtare. Ajo mund të plotësohet me shumë veprimtari të tjera të cilat janë dëshmuar të suksesshme gjatë punës praktike të mësimdhënësve të përkushtuar.

Për një mësimdhënie të suksesshme janë më rëndësi jo vetëm cilësitë e mësimdhënësit, qëndrimet e tij ndaj lëndës dhe qasjet e përgjithshme metodologjike, por edhe përgatitja e mësimdhënësit për mbajtjen praktike të mësimit. Të gjitha këto karakteristika të mësimdhënësit të suksesshëm mund të përvetësohen me vullnet dhe punë të vazhdueshme.



Matematika në Kornizën e Kurrikulit

Para se të fillojë procesi mësimor, mësimdhënësi duhet të familjarizohet me Kornizën e Kurrikulit të Kosovës për të kuptuar se: Pse?, Çka?, Si? dhe Sa mirë? duhet të mësojnë nxënësit. Mësimdhënësit përmes Kornizës së kurrikulit arrijnë të kuptojnë qëllimet e sistemit të arsimit në Kosovë, parimet themelore të cilat i mbështetë ky kurrikul, karakteristikat e tij dhe organizimin e fushave lëndore për nivelet e ndryshme të arsimit. Të gjitha këto elemente ndihmojnë mësimdhënësit që të planifikojnë shtjellimin e lëndës në mënyrë që ajo të jetë në funksion të arritjes së qëllimeve të sistemit të arsimit në Kosovë. Parimet thelbësore të cilat e karakterizojnë kornizën e kurrikulit janë:

- Mësimdhënia me nxënësin në qendër dhe gjithëpërfshirja,
- Qasja e bazuar në kompetenca,
- Mësimdhënia dhe të nxënit e integruar,
- Fleksibiliteti dhe ndryshueshmëria,
- Transparenca dhe llogaridhënia.

Për zbatimin e kornizës së kurrikulit sugjerohet përdorimi i metodave, teknikave dhe strategjive të reja të mësimdhënies dhe të nxënit, të cilat mundësojnë përfshirjen aktive të të gjithë nxënësve në procesin mësimor, si dhe zhvillimin e kompetencave të tyre për jetë dhe punë në të ardhmen. Qasja e bazuar në kompetenca kërkon zgjedhjen dhe organizimin e atyre aktiviteteve të të nxënit, të cilat integrojnë njohuritë e nevojshme me vlerat, qëndrimet dhe shkathtësitë. Kjo qasje ndryshon nga ajo e të nxënit rutinë, e cila bazohet në memorizimin dhe reproduktimin e njohurive të para-fabrikuara.

Korniza e Kurrikulit të Kosovës është e bazuar në zhvillimin e gjashtë kompetencave:

- Kompetencat e komunikimit dhe të shprehurittë cilat synojnë që të rinjtë të bëhen komunikues efektiv
- Kompetencat e të menduarit për të përgatitur të rinjtë të bëhen mendimtarë kritikë dhe kreativë
- Kompetencat e të mësuarit që aftësojnë të rinjtë të bëhen nxënës të suksesshëm
- Kompetencat për jetë punë dhe mjedis të cilat synojnë që të rinjtë të bëhen kontribuues produktiv të Kosovës dhe vendeve të tjera
- Kompetencat personale për zhvillimin e shëndoshë të individëve të cilët bëjnë zgjedhjet e duhura në jetë duke u mbështetur në dije
- Kompetencat qytetare për të bërë të rinjtë qytetarë aktivë pjesëmarrës dhe të përgjegjshëm.

Zhvillimi i këtyre kompetencave tek nxënësit synohet të arrihet përmes shtjellimit të përmbajtjeve të sistemuara në 7 fusha lëndore:

- Gjuhët dhe komunikimi
- Artet
- Matematika
- Shkencat
- Shoqëria dhe mjedisi
- Shëndeti dhe mirëqenia
- Puna dhe jeta

Në kornizën e kurrikulit përshkruhet se "matematika është një fushë lëndore e rëndësishme për zhvillimin e kompetencave të të menduarit, të nxënit dhe atyre të punës." Mirëpo, përveç këtyre kompetencave, matematika ndihmon edhe në zhvillimin e kompetencës së komunikimit përmes përdorimit të kodeve dhe simboleve të ndryshme, ndërsa përmes zhvillimit të të rezonuarit logjik që është karakteristikë për këtë lëndë, kontribuon edhe në zhvillimin e kompetencës personale dhe asaj qytetare.

Sipas kurrikulit, karakteristikë e mësimdhënies së matematikës në nivelin 1 dhe 2, që përfshin ciklin e shkollimit fillor, është aftësimi i nxënësve për të kuptuar konceptet kryesore, siç janë: numërimi, të kuptuarit matematik dhe zgjidhja e problemeve. Ndërsa në nivelin 4 dhe 5, që i referohet shkollës së mesme të ultë, mësimdhënia duhet t'i shërbejë aftësimit të nxënësve për të kuptuar konceptet më komplekse në aritmetikë, gjeometri, algjebër, probabilitet dhe statistikë, si dhe avancimit të shkathtësive të tyre për zgjidhjen e problemeve në këto disiplina matematike, të cilat do të ndihmojnë orientimin e tyre në karrierë. Po ashtu, është theksuar dhe roli i matematikës në kuptimin e shkencave të tjera, si dhe zbatimi i saj në teknologji, arte, jetën e përditshme dhe zgjidhjen e problemeve në përgjithësi.

Për dallim nga fushat e tjera lëndore, p.sh. nga fusha lëndore e shkencave, e cila përmban në vete disa lëndë, si: lëndën e fizikës, kimisë, biologjisë, etj., matematika në kornizën e kurrikulit është definuar si fushë lëndore dhe si lëndë. Kjo ka lehtësuar hartimin e rezultateve thelbësore të të nxënit për matematikën.

Rezultatet thelbësore për lëndën e matematikës janë definuar për secilën nga 8 aspektet e rëndësishme të mësimdhënies së saj siç janë:

- Zgjidhja e problemeve
- Arsyetimet dhe vërtetimet matematike
- Komunikimi në/përmes matematikës
- Lidhjet brenda matematikës dhe jashtë saj
- Përfaqësimet në/përmes matematikës
- Promovimi i modelimit matematikë
- Strukturimi i të menduarit matematik
- Përdorimi i TIK në/për matematikë

Në bazë të rezultateve thelbësore të të nxënit të lëndës së matematikës do të përcaktohen edhe planet dhe programet e reja mësimore. Deri atëherë, fokusi i mësimdhënësve gjatë përgatitjes së planeve globale, mujore dhe atyre ditore duhet të jetë në hartimin e rezultateve të të nxënit dhe përcaktimin e aktiviteteve të ndryshme në atë mënyrë që ato të kontribuojnë në zhvillimin e gjashtë kompetencave të Kornizës së Kurrikulit, si dhe në arritjen e rezultateve thelbësore mësimore të lëndës së matematikës për nivelin e caktuar.

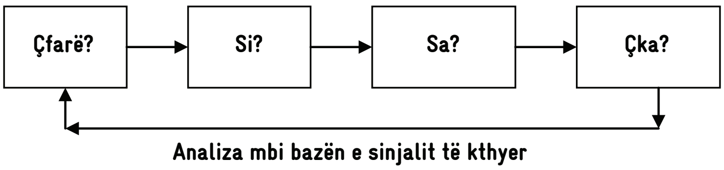
Përgatitja e orës mësimore

> Nëse keni dështuar në planifikim, atëherë ju keni planifikuar dështimin.
>
> **Michael Fullan**

Mësimdhënia e suksesshme nuk ndodh rastësisht. Ajo është rezultat i një procesi të planifikuar mirë, i cili kërkon kohë, energji, fleksibilitet dhe përkushtim. Prandaj, mësimdhënësit duhet t'i qasen me kujdes hartimit të planit vjetor, mujor dhe planifikimit ditor të orës mësimore. Një planifikim i suksesshëm është atributi kryesor që i paraprin suksesit në mësim, ndërsa mungesa e tij bën që mësimdhënësit t'i ekspozohen rrezikut për dështim.

Mësimdhënësit duhet të hartojnë planin vjetor dhe atë mujor. Planet e tilla janë të domosdoshme, sepse ato orientojnë mësimdhënësin në shtjellimin sistematik të përmbajtjes lëndore. Më pas, mësimdhënësi duhet t'i kushtojë kujdes planifikimit dhe përgatitjes ditore.

Procesi i planifikimit ditor dhe zbatimit të tij është paraqitur me skemën e mëposhtme:



Sipas skemës së mësipërme, për një planifikim të suksesshëm ditor, mësimdhënësi duhet të ketë përgjigje në këto pyetje:

1. Çfarë do të arrihet? Pra, shkurt: Çfarë?
- Pse është e rëndësishme njësia mësimore?
- Ç'problem nga jeta reale mund të zgjidhet me përvetësimin e përmbajtjes së re?
- Cilat janë paranjohuritë e nxënësve rreth njësisë që do të zhvillohet?
- Cilat janë nevojat e nxënësve rreth kësaj njësie mësimore?
- Si lidhet njësia e re me njësinë paraprake dhe ato që vijnë më pas?
- Çfarë materiale nevojiten për shtjellim dhe demonstrim të përmbajtjes?
- Cilat kompetenca mund të zhvillohen te nxënësit përmes kësaj njësie?

2. Si do të arrihet? Shkurtimisht: Si?
- Cilat metoda, strategji, teknika, procedura do të përdoren për të arritur suksesin në shtjellimin e përmbajtjes?

3. Sa synohet të arrihet? Shkurtimisht: Sa?
- Si të vlerësohet ajo që kanë mësuar nxënësit?

Ndërsa pas zbatimit të planit, ai duhet të reflektojë rreth pyetjes:

4. Çka u arrit? Shkurtimisht: Çka?
- Çka shkoi mirë?
- Çka duhet të ndryshohet për të pasur më shumë sukses herën tjetër?

Dy pyetjet e fundit ndihmojnë mësimdhënësin të analizojë punën e tij, të reflektojë për sukseset dhe problemet eventuale. Informacionet që fitohen gjatë reflektimit (sinjalet e kthyera) e ndihmojnë mësimdhënësin që të përmirësojë praktikën e tij, duke ia përshtatur atë nevojave dhe interesimeve të nxënësve.

Ndërsa, përgjigjet në të gjitha pyetjet, ndihmojnë përgatitjen ditore, e cila zakonisht përmban: njësinë mësimore, rezultatet e të nxënit, mjetet dhe materialet e nevojshme, strukturën e organizimit të orës mësimore, aktivitetet dhe procedurat e të nxënit, si dhe detyrat e shtëpisë për nxënësit. Për të ndihmuar mësimdhënësit që t'iu adresohen me sukses këtyre elementeve, më poshtë janë dhënë sqarimet për secilën prej tyre.

Rezultatet e të nxënit

Meqë Korniza e Kurrikulit të Kosovës bazohet në qasjen e bazuar në kompetenca, atëherë mësimdhënësi në përgatitjen e vet ditore duhet të hartojë rezultatet e të nxënit, arritja e të cilave i kontribuon zhvillimit të kompetencave të nxënësve.

Çfarë është rezultati i të nxënit dhe çka e dallon atë nga objektiva mësimore?

Sipas UNESCOs, rezultati i të nxënit paraqet atë çfarë një nxënës pritet të dijë, të kuptojë dhe/ose të jetë në gjendje të demonstrojë pas përfundimit të një procesi të të nxënit, si dhe shkathtësitë e caktuara intelektuale dhe praktike të fituara dhe të demonstruara me përfundimin e suksesshëm të një njësie mësimore, kursi apo programi. Thënë shkurt, ”Rezultati i të nxënit është formulim që tregon se çfarë një nxënës pritet të jetë në gjendje të bëjë në përfundim të një njësie, moduli apo kursi.” (Stephen Adam, 2004). Adam shkruan se “ekziston një konfuzion i shpeshtë në mes të rezultateve të të nxënit dhe qëllimeve e objektivave dhe shumë persona i referohen rezultateve të të nxënit dhe objektivave si sinonime. Qëllimet janë të lidhura për mësimdhënien dhe synimet e mësimdhënësit, derisa rezultatet e të nxënit janë të lidhura me procesin e të nxënit”. Pra, objektivat janë formulime që tregojnë se çfarë mësimdhënësi synon për nxënësit e tij dhe janë zakonisht pjesë e qasjeve me mësimdhënësin në qendër, derisa rezultatet e të nxënit janë formulime që tregojnë se çfarë nxënësit janë në gjendje të bëjnë ose demonstrojnë si rezultat i të nxënit dhe në këtë mënyrë ato janë pjesë e qasjes me nxënësin në qendër.

Për të qartësuar më mirë dallimin në mes të objektivës mësimore dhe rezultatit të të nxënit po japim më poshtë dy shembuj.

1. Në fund të orës mësimore nxënësit do të kenë njohuri për katërkëndëshat.
2. Në fund të orës mësimore nxënësit do të jenë të aftë të përkufizojnë katërkëndëshat .

Në rastin e parë është dhënë një objektivë mësimore, sepse ajo shpreh se çfarë një mësimdhënës synon që nxënësit e tij të dinë, ndërsa në rastin e dytë është dhënë një rezultat i të nxënit, sepse ai tregon se çfarë janë në gjendje të bëjnë nxënësit pas përfudimit të procesit të të nxënit. Një sqarim i tillë ndihmon shumë mësimdhënësit në hartimin e rezultateve të të nxënit.

Përpilimi i rezultateve të të nxënit

Me rastin e përpilimit të rezultateve të të nxënit, mësimdhënësit duhet të kenë kujdes që ato të jenë në pajtim me kërkesat e Kornizës së Kurrikulit për zhvillimin e kompetencave, rezultatet thelbësore të klasës përkatëse, si dhe planet dhe programet e matematikës për atë klasë. Përveç kësaj, mësimdhënësit duhet të kenë kujdes që përpilimin e rezultateve të të nxënit ta bëjnë në varësi të përmbajtjes mësimore, niveleve të ndryshme të të nxënit të nxënësve, si dhe mënyrës së vlerësimit. P.sh nëse njësia mësimore është konstruktimi i katrorit, atëherë një rezultat i të nxënit do të dukej kështu: Nxënësit:

- përdorin vizoren dhe kompasin për konstruktimin e saktë të katrorit, në varësi të brinjës së dhënë.
  ose më shkurt:
- konstruktojnë saktë katrorin në varësi të brinjës së dhënë.

Në formulimin e rezultatit të mësipërm të të nxënit është marrë parasysh përmbajtja e njësisë mësimore dhe të nxënit e nxënësve (konstruktimi i katrorit), si dhe mënyra e vlerësimit (konstruktimi i saktë - respektimi i procedurës).

Për të shkruar një rezultat të të nxënit, mësimdhënësi duhet t'i përgjigjet pyetjes: Çfarë mund dhe çfarë duhet të arrihet nga nxënësi? Fjala "mund" paraqet pikënisjen e bazuar në paranjohuritë e nxënësve, ndërsa fjala "duhet" shpreh kriterin e suksesit që nxënësit e arrijnë si rezultat i të nxënit. Në rezultatin e të nxënit të përshkruar më sipër nxënësit mund të konstruktojnë (përmes përdorimit të vizores dhe kompasit që kanë mësuar më herët) katrorin, si dhe duhet të konstruktojnë saktë atë në varësi të brinjës së dhënë.

Me rastin e përpilimit të rezultateve të të nxënit, mësimdhënësit duhet të kenë parasysh elementet përbërëse të tyre, siç janë: sjellja/veprimi, kushti dhe kriteri. Të gjitha këto elemente duhet të ndërthuren në përpilimin e rezultatit të të nxënit në mënyrë që të plotësojnë karakteristikat e tyre për të qenë (SMART):

- Specifike: të qarta dhe të fokusuara.
- Të matshme/të vëzhgueshme: të vlerësohet shkalla e arritjes së tyre.
- Të arritshme: diçka që duhet ta bëjnë nxënësit si rezultat i të nxënit.
- Të realizueshme: diçka që mund ta bëjnë nxënësit.
- Të përcaktuara në kohë: të realizueshme brenda një kohe të caktuar.

Në rezultatin e të nxënit të përshkruar më sipër, sjellja/veprimi është "përdorin"/"konstruktojnë", kushti është "katrorin", ndërsa kriteri është "saktësia" e konstruktimit të katrorit. Të gjitha këto elemente janë të harmonizuara në mënyrë që rezultati i të nxënit të plotësojë karakteristikat SMART.

Sjellja në rezultatin e të nxënit shprehet me foljet vepruese. Për të caktuar foljen e duhur, mësimdhënësi duhet të identifikojë se çfarë mund të demonstrojë nxënësi si rezultat i të nxënit. Me qëllim të shmangies së paqartësive që shoqërojnë fjalët: di, njeh, kupton, mëson, familjarizohet me, ambientohet me, etj. propozohet përdorimi i foljeve të cilat mund të vëzhgohen. Pra, në vend të rezultatit të të nxënit "kupton konstruktimin e katrorit" këshillohet të shënohet "përdorin vizoren dhe kompasin për konstruktimin e saktë të katrorit", gjë e cila demonstron se nxënësit arrijnë të konstruktojnë katrorin.

A janë të domosdoshme tri elementet me rastin e formulimit të rezultateve të të nxënit?

Aty ku ka mundësi sugjerohet përpilimi i rezultateve të të nxënit me tri elementet, sepse një gjë e tillë ndihmon mësimdhënësin të vlerësojë më mirë shkallën e përfitimit të njohurive nga nxënësit. Mirëpo, është i pranueshëm dhe formulimi i rezultatit të të nxënit me dy elemente, me sjelljen dhe kushtin. Ekzistojnë dhe shembuj të rezultateve të të nxënit me dy elemente p.sh. nxënësit:

- mbledhin thyesat me emërues të ndryshëm.
- zgjidhin ekuacione lineare me një të panjohur.

Meqë rezultatet e të nxënit përfshijnë njohuritë, shkathtësitë, qëndrimet dhe vlerat, atëherë përpilimi i tyre mund të realizohet përmes njohjes së tri fushave të të nxënit:

- Fushës së njohjes, e cila ka të bëjë me njohuritë dhe proceset.
- Fushës emocionale, e cila ka të bëjë me qëndrimet dhe vlerat.
- Fushës psikomotore, e cila ka të bëjë me shkathtësitë fizike.

Në hartimin e rezultateve të të nxënit në matematikë ka rëndësi sidomos kuptimi i fushës së njohjes dhe klasifikimi i niveleve të të nxënit në këtë fushë sipas Taksonomisë së Bloom-it. Sipas kësaj taksonomie, në fushën e njohjes ekzistojnë 6 nivele të të nxënit, të klasifikuara sipas hierarkisë nga niveli më i ultë deri te niveli më i lartë i të nxënit: njohja, të kuptuarit, zbatimi, analiza, sinteza dhe vlerësimi. Përkufizimi i secilit nivel, shkathtësitë që i karakterizojnë këto nivele, caktimi i foljeve për të përpiluar rezultatet e të nxënit sipas këtyre niveleve, si dhe nga një shembull për çdo nivel janë dhënë në tabelë:

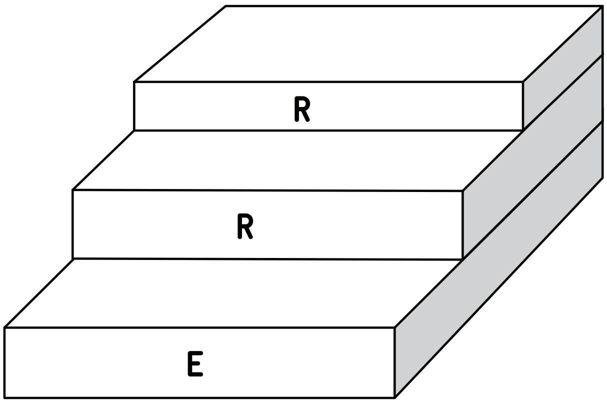
NIVELI	PËRKUFIZIMI DHE SHKATHTËSITË	FOLJET	SHEMBUJ
Njohja	Rikujtim i njohurive. Shkathtësitë që e karakterizojnë këtë nivel janë: • Vrojtimi dhe rikujtimi i njohurive. • Njohja e formulave, simboleve, përkufizimeve.	liston, përkufizon, tregon, lidh, përshkruan, vizaton, identifikon, emërton, numëron, etj.	Identifikon elementet kryesore të trekëndëshit.
Të kuptuarit	Aftësi për të zotëruar kuptimin. Shkathtësitë e këtij niveli janë: • Interpretimi i fakteve, krahasimi, kontrastet. • Rregullimi, grupimi dhe klasifikimi i njohurive.	klasifikon, shpjegon, krahason, dallon, diskuton, gjen shembuj, etj.	Klasifikon trekëndëshat sipas gjatësisë së brinjëve.
Zbatimi	Aftësia për të përdorur rregullat, metodat, konceptet, principet dhe formulat e mësuara në situata të reja. Shkathtësitë e këtij niveli janë: • Përdorimi i rregullave, formulave, metodave, koncepteve, etj. në situata të reja. • Zgjidhja e problemeve që kërkojnë zbatimin e formulave të mësuara.	njehson, konstrukton, zbaton, zgjidh, përdor, plotëson, ilustron, etj.	Konstrukton trekëndëshin kur janë dhënë tri brinjët e tij.
Analiza	Aftësia për të zbërthyer informacionin në pjesë përbërëse dhe identifikimin e lidhjeve në mes tyre. Shkathtësitë janë: • Gjetja e modeleve. • Identifikimi i pjesëve përbërëse. • Njohja e kuptimeve të fshehta.	analizon, kategorizon, provon, paraqet në diagram, zbërthen, etj.	Analizon karakteristikat kryesore të trekëndëshit barabrinjës.
Sinteza	Aftësia për të lidhur në mënyrë kreative pjesët në një tërësi. Shkathtësitë që e karakterizojnë këtë janë: • Përdorimi i ideve të vjetra për të krijuar ide të reja. • Përgjithësimet nga faktet e dhëna. • Lidhja e njohurive nga lëmi të ndryshme. • Parashikimet dhe nxjerrja e përfundimeve.	formulon, gjeneralizon, integron, modelon, strukturon, konstrukton, etj.	Formulon rregullat për 4 pikat karakteristike të trekëndëshit.
Vlerësimi	Gjykimi mbi vlerën e njohurive. Shkathtësitë janë: • Vlerësimi mbi kritere të caktuara të rezultateve. • Interpretimet origjinale të bazuara mbi argumente. • Shfrytëzimi i burimeve të ndryshme.	vlerëson, gjykon, vendos, rangon, përmbledh, konkludon, gjen shembuj nga jeta, etj.	Gjen shembuj nga jeta në të cilët duhet zbatuar ngjashmëria e trekëndëshave.

Mësimdhënësit duhet të dinë se foljet e dhëna në tabelë mund të përcaktojnë rezultate të të nxënit të nivelit më të lartë ose më të ultë se që është shënuar më tabelë, varësisht nga kërkesa që vjen pas foljes. Kështu p.sh. nëse kërkojmë që nxënësit të gjejnë zbatimin e logaritmeve në jetën praktike, kjo është një rezultat i të nxënit të nivelit të lartë edhe pse folja të gjejë është e nivelit të të kuptuarit.

Struktura ERR e organizimit të orës mësimore

Struktura ERR (Evokimi, Realizimi i kuptimit dhe Reflektimi) është modeli më i përshtatshëm për të organizuar procesin e mësimdhënies dhe të nxënit në klasë, sepse ajo korrespondon me aktivitet e të nxënit që Piazhe dhe pasuesit e tij i kanë identifikuar gjatë hulumtimeve: fazën e parashikimit, të ndërtimit të njohurive dhe atë të konsolidimit të tyre. Kjo strukturë ofron mundësinë e zhvillimit të procesit të të nxënit sipas një spiraleje, e cila fillon me rikujtimin e njohurive në fazën e evokimit (parashikimi), zgjerohet me informacion të ri gjatë fazës së realizmit të kuptimit (ndërtimi i njohurive) dhe pas përforcimit të njohurive të fituara gjatë fazës së reflektimit, ofron mundësi për zgjerimin e tyre në të ardhmen edhe pas përfundimit të orës mësimore.

Struktura ERR është edhe një model tri shkallësh i organizimit të procesit mësimor, e cila respekton hierarkinë e niveleve të të nxënit dhe të menduarit. Ajo fillon me evokimin e njohurive të nxënësve që paraqet nivelin e parë, vazhdon me përvetësimin e njohurive që konsiderohet nivel i dytë i të nxënit dhe përfundon në reflektim, me sintetizimin dhe vlerësimin e informacionit të fituar, që paraqet nivelin më të lartë të të menduarit.



Në fazën e parë të evokimit, mësimdhënësi udhëheqë nxënësit drejt rikujtimit të njohurive me qëllim që të vendosë një bazë të mirë mbi të cilën në mënyrë të natyrshme do të vendoset informacioni i ri. Në këtë mënyrë, mësimdhënësi arrin të jetësojë thënien e njohur se:

"Njohuritë që një njeri zotëron janë kushti i parë për ato që mund të mësojë."

Kjo fazë është shumë e rëndësishme në procesin e të nxënit, sepse përmes rikujtimit të njohurive ofrohet mundësia e përfshirjes aktive të të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Njohuritë që prezantojnë të tjerët gjatë fazës së evokimit, si dhe dëshira për të marrë pjesë në proces, zgjojnë kureshtjen e nxënësve dhe nxisin motivimin e brendshëm të tyre për të nxënë. Këto elemente janë shumë të rëndësishme për mbarëvajtjen e procesit të të nxënit, sepse ndikojnë në ruajtjen e interesimit të nxënësve për të nxënë edhe gjatë fazave të tjera të orës mësimore.

Gjatë fazës së dytë, asaj të realizimit të kuptimit, nxënësit ballafaqohen me informacionin e ri, qoftë përmes leximit të një materiali, dëgjimit të një prezantimi, realizimit të një eksperimenti, shfrytëzimit të uebfaqeve, etj. Kjo është faza në të cilën arrihet "të nxënit" e njohurive të reja. Duke vendosur lidhje në mes të njohurive që dinë dhe atyre me të cilat janë duke u ballafaquar, nxënësit arrijnë të ndërtojnë "të kuptuarit" e tyre rreth informacionit të ri.

Qëllimi i fazës së tretë është përforcimi i informacionit të fituar. Një gjë e tillë mund të arrihet përmes zgjidhjes së detyrave, gjetjes së shembujve nga jeta praktike në të cilat mund të zbatohen njohuritë e fituara, ndërtimit të ndonjë modeli praktik, diskutimeve të ndryshme, etj. Mësimdhënësi në këtë fazë duhet të inkurajojë nxënësit që të jenë sa më të shkathtë në zgjidhjen e problemeve, sa më kreativë në prezantimin e rezultateve të punës së tyre, sa më krijues në punimin e modeleve, dhe të jenë bindës gjatë diskutimeve që organizohen rreth çështjeve të caktuara. Po ashtu, ai duhet të kontrollojë edhe arritjen e rezultateve të të nxënit dhe të bëjë intervenimet e duhura në rast nevoje.

Aktivitetet dhe procedurat e mësimdhënies dhe të nxënit

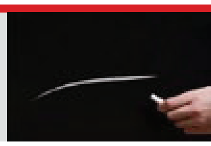
Pas përpilimit të rezultateve të të nxënit, mësimdhënësi në përgatitjen e tij ditore duhet të shënojë edhe aktivitetet dhe procedurat në bazë të cilave do të udhëheqë nxënësit në përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive të tyre.

Qasja me nxënësin në qendër ofron mundësinë e zgjedhjes së metodave, strategjive dhe teknikave efikase të mësimdhënies dhe të nxënit të cilat mundësojnë përfshirjen aktive të nxënësve në procesin mësimor, ndërtimin e njohurive nga ana e tyre, si dhe zhvillimin e kompetencave të nxënësve të parapara me Kornizën e Kurrikulit të Kosovës. Meqë numri i metodave, strategjive dhe teknikave mësimore është mjaft i madh, emërtimi i tyre mund të ndryshojë në programe të ndryshme, si dhe në lëndën e matematikës disa nga ato duhet të modifikohen, atëherë është e këshillueshme që mësimdhënësi në përgatitjen e tij ditore të përshkruajë aktivitetet dhe procedurat e mësimdhënies dhe të nxënit, të cilat planifikon t'i realizojë me nxënës. Ai mund të shënojë edhe metodat, strategjitë dhe teknikat mësimore që do të përdorë, por është mirë që në kuadër të tyre të përshkruajë aktivitetet dhe procedurat që do të realizojë. Në këtë mënyrë planifikimi i tij do të jetë më i plotë, më i qartë dhe më i kuptueshëm për një numër më të gjerë të mësimdhënësve. Një përgatitje e tillë mund t'ju shërbejë edhe mësimdhënësve të tjerë, të cilët dëshirojnë të zbatojnë qasjen bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit, mirëpo nuk kanë pasur rastin të marrin pjesë në programe për zhvillim profesional të tyre.

Mësimdhënësi mund të zgjedhë aktivitete të ndryshme për t'i realizuar në klasë me nxënësit. Mirëpo, zgjedhja e tyre duhet të bazohet në rezultatet e të nxënit që planifikohen të arrihen, aftësitë e nxënësve, qëllimet e fazave të ndryshme të strukturës ERR, si dhe kohën që është në dispozicion. Spektri i gjerë i aktiviteteve ofron mundësi që mësimdhënësit të jenë kreativ në zgjedhjen e tyre. Për të zgjuar interesimin e nxënësve për të nxënë, mësimdhënësi duhet të zgjedhë aktivitete të larmishme, të cilat janë të pëlqyeshme nga nxënësit dhe sjellin kënaqësi dhe entuziazëm në klasë. Ndërsa, për të lehtësuar të nxënit e të gjithë nxënësve, mësimdhënësi duhet të planifikojë aktivitete që kanë karakter vizual, auditiv dhe kinestetik. Kjo është me rëndësi, sepse nxënësit e kanë më të lehtë të mësojnë, nëse përfshihen në aktiviteteve që u përshtaten stileve të tyre të të nxënit.

Po ashtu, mësimdhënësit duhet të kujdesen që të zgjedhin aktivitete të përshtatshme për nxënësit që kanë nivel të ndryshëm të aftësive për të nxënë. Dhe mbi të gjitha, mësimdhënësit duhet të zgjedhin aktivitete që motivojnë të nxënit e nxënësve, që kultivojnë kërshërinë dhe interesin e tyre për të mësuar, si dhe që kontribuojnë që nxënësit ta duan dhe ta mësojnë lëndën e matematikës.

Për të arritur synimet e mësipërme, mësimdhënësit duhet të zgjedhin aktivitete të cilat kanë nxënësin në qendër dhe të nxënit e tij. Pra, aktivitetet të cilat mundësojnë të nxënit aktiv, të nxënit në bashkëpunim, të nxënit të bazuar në probleme, përmes projekteve, rastet e studimit, etj.



Të nxënit aktiv

> "E dëgjoj dhe e harroj. E shoh dhe e mbaj në mend. E bëj dhe nuk e harroj."
>
> **Proverb kinez**

Në parim ekzistojnë dy forma të të nxënit: të nxënit pasiv dhe ai aktiv. Të nxënit pasiv realizohet gjatë zbatimit të mësimdhënies së drejtpërdrejtë, e cila kërkon që nxënësit në mënyrë pasive të pranojnë informacionin përmes dëgjimit të një ligjërate, shikimit të ndonjë materiali, ose marrjes së shënimeve. Në anën tjetër, të nxënit aktiv është një proces, i cili kërkon pjesëmarrjen aktive të nxënësve në leximin apo shikimin e ndonjë materiali, realizimin e ndonjë eksperimenti, kërkimin e informacioneve në internet, zgjidhjen e detyrave, reflektimin me shkrim rreth çështjeve të ndryshme, etj.

Përfshirja aktive e nxënësve në aktivitetet e mësipërme mund të realizohet në forma të ndryshme, disa prej të cilave janë:
- Inkurajimi i nxënësve për të formuluar pyetje, për të hulumtuar dhe gjetur përgjigje, për të provuar zgjidhjen e detyrave, si dhe për të shqyrtuar natyrën e zgjidhjeve.
- Motivimi i nxënësve për të marrë pjesë në diskutime, debate, dramatizime, etj.
- Përkrahja e nxënësve për të realizuar eksperimente apo projekte të ndryshme, për të ndërtuar modele të objekteve, etj.

Të nxënit aktiv më së miri sqarohet përmes thënies kineze të shënuar në fillim, e cila thekson faktin se nëse nxënësit përfshihen aktivisht në procesin e të nxënit, atëherë ajo njohuri është e qëndrueshme dhe mund të shfrytëzohet në rast nevoje.

Aktivitetet që promovojnë të nxënit aktiv kërkojnë që mësimdhënësi të aftësojë nxënësit për t'u ballafaquar në mënyrë të drejtpërdrejtë me informatën, për ta shqyrtuar atë nga këndvështrime të ndryshme, për të kërkuar informacione shtesë në rast nevoje, për të ndërtuar të kuptuarit mbi informacionin e pranuar dhe për të gjetur mundësinë e zbatimit të informacionit të fituar. Meqë të nxënit në matematikë është një proces në të cilin "ndërtohet" njohuria dhe kërkohet zbatimi i njohurisë së fituar në zgjidhjen e detyrave të ndryshme, atëherë organizimi i procesit mësimor përmes aktiviteteve që promovojnë të nxënit aktiv e ndihmojnë këtë proces.

Në lëndën e matematikës mund të realizohen me sukses shumë aktivitete që kanë për qëllim përfshirjen aktive të nxënësve në procesin e të nxënit. Disa prej tyre janë: leximi i njësive mësimore nga ana e nxënësve, diskutimi rreth informacionit të lexuar, formulimi i hipotezave dhe vërtetimi i tyre, kërkimi i informacionit shtesë, zbatimi i njohurisë së fituar në zgjidhjen e detyrave, konstruktimi i figurave të ndryshme, vizatimi dhe ndërtimi i modelit të objekteve gjeometrike, realizimi i projekteve të caktuara, matjet e ndryshme, puna me të dhëna, etj. Këto aktivitete mund të realizohen përmes metodave, strategjive dhe teknikave të ndryshme që promovojnë të nxënit aktiv, disa prej të cilave janë:

INSERT-i apo leximi me anën e shenjave. Nxënësit lexojnë materialin dhe në paragrafe varësisht nga njohuritë e tyre vendosin 4 shenjat:

"√ " për informacionin që dinë,
"+" për informacionin që mësojnë,
"-" për informacionin që dinë ndryshe,
"?" për informacionin e paqartë ose për të kërkuar më shumë informacion.

DRTA apo lexim i drejtuar. Njësia ndahet në pjesë. Pas leximit të pjesëve mësimdhënësi parashtron pyetjet për të kontrolluar të kuptuarit e nxënësve.

Ditari dypjesësh. Është një tabelë e përbërë nga dy shtylla. Nxënësit në anën e majtë të tabelës kanë pyetjet dhe detyrat, ndërsa pas leximit të pjesës, në anën e djathtë ata duhet të shënojnë përgjigjet dhe të zgjidhin detyrat.

Di/Dua të di/Mësova. Është tabelë e përbërë nga tri kolona. Në kolonën e parë nxënësit shënojnë atë që dinë ose që mendojnë se dinë, në shtyllën e dytë shënojnë pyetjet rreth informatave që ju interesojnë rreth një teme të caktuar, ndërsa pas leximit të materialit nxënësit në shtyllën e tretë shënojnë atë që mësuan, si dhe përgjigjet e atyre pyetjeve, të cilat kanë mundur t'i gjejnë në material.

Nëse në procesin e të nxënit aktiv marrin pjesë 2 apo më shumë nxënës, atëherë kemi të bëjmë me të nxënit në bashkëpunim. Kjo formë e të nxënit është shumë e përshtatshme për ta përdorur në mësimdhënien e matematikës, sepse nxënësit shpeshherë kanë nevojë të bashkëpunojnë për të kuptuar një problem apo për të analizuar mënyrën e zgjidhjes së tij. Matematika është lëndë e ndërtuar në mënyrë sistematike, ku njohuritë e reja vendosen mbi ato që janë mësuar më parë, prandaj zgjidhja e shumë detyrave kërkon rikujtimin e formulave, rregullave apo procedurave të mësuara më parë dhe jo të gjitha mund t'i kujtohen individit në çast. Bashkëpunimi i kontribuon edhe zgjidhjes së saktë të detyrave. Si rezultat i punës në grup shumë gabime individuale mund të evitohen me kohë.

Ekzistojnë forma të ndryshme me anë të cilave realizohet të nxënit në bashkëpunim, por secila prej tyre ndjek pothuajse të njëjtën procedurë si më poshtë:

- Mësimdhënësi prezanton një material të ri, diskuton një çështje që duhet të hulumtohet, parashtron disa pyetje ose një problem.
- Ndan klasën në grupe të vogla me nga 2-6 anëtarë.
- Jep detyrën për grupet.
- Ofron materialet e nevojshme ose adresat në internet, të cilat do të shfrytëzohen nga nxënësit.
- Kërkon që nxënësit të bashkëpunojnë për të gjetur informacionet e kërkuara, qoftë përgjigjet në pyetjet e parashtruara ose zgjidhjen e problemit.
- Nxënësit duhet të sigurohen që të gjithë anëtarët e grupit janë familjarizuar me përgjigjet dhe zgjidhjen e problemit.
- Prezantohet puna e grupeve në forma të ndryshme.

Nxënësit gjatë bashkëpunimit në grup diskutojnë idetë e ndryshme matematikore, analizojnë mënyrat e zgjidhjes së problemeve, rikujtojnë njohuritë apo modelet e nevojshme për zgjidhjen e tyre, ndërtojnë hipoteza dhe gjejnë rrugë për vërtetimin e tyre, identifikojnë rastet nga jeta e përditshme ku mund të zbatohet njohuria e fituar, etj. Derisa nxënësit bashkëpunojnë në grup, mësimdhënësi monitoron punën e tyre. Ai/ajo inkurajon punën e grupeve, ofron përkrahje, sqaron paqartësitë eventuale dhe në rast nevoje ofron ndihmën e tij/saj.

Motoja e të nxënit në bashkëpunim është "përgjegjësi e përbashkët, llogaridhënie individuale". Kjo shprehje do të thotë se veprimtaritë e të nxënit në bashkëpunim kërkojnë nga nxënësit që të ndjejnë përgjegjësi për njëri-tjetrin dhe të ndihmojnë shokët/shoqet të mësojnë, sidomos ata që kanë vështirësi në të nxënë, mirëpo në anën tjetër ata japin llogari individuale për të nxënit e tyre personal.

Sipas David and Roger Johnson ekzistojnë 5 tipare që karakterizojnë të nxënit në bashkëpunim:

- Për mbarëvajtje të punës në grup mësimdhënësi duhet të zhvillojë te nxënësit **ndërvarësinë pozitive**. Kjo mund të arrihet duke iu caktuar nxënësve synimet e përbashkëta dhe në anën tjetër detyra dhe role të ndryshme në zgjidhjen e tyre. Mësimdhënësi "mbjell" te nxënësit ndërvarësinë pozitive duke iu sqaruar se zgjidhja e detyrave kërkon bashkëpunim dhe si rezultat i punës në grup ata mund "të fundosen ose të notojnë së bashku".
- Nxënësit duhet të **ndërveprojnë në mes vete** për të realizuar me sukses detyrat e ndryshme në matematikë. Gjatë ndërveprimit ata ndajnë njohuritë e tyre, ndihmojnë, plotësojnë dhe inkurajojnë njëri-tjetrin për të arritur sukses. Sa më shumë që nxënësit kujdesen për njëri-tjetrin aq më shumë ata punojnë për të arritur qëllimet e përbashkëta.
- Mësimdhënësi duhet të kultivojë te nxënësit **përgjegjësinë vetjake dhe në grup**. Secili nxënës është përgjegjës për realizimin e detyrës së tij brenda grupit, por në anën tjetër ai është përgjegjës edhe për suksesin e anëtarëve të tjerë të grupit.
- Gjatë të nxënit në grup nxënësit përdorin **shkathtësitë individuale dhe shprehitë sociale**. Me qëllim që të koordinohet puna brenda grupit dhe të arrihen synimet, nxënësit duhet të përdorin disa shkathtësi, siç janë: udhëheqja, marrja e vendimeve, ndërtimi i besimit, komunikimi dhe menaxhimi i konČikteve.
- Mësimdhënësi duhet të inkurajojë nxënësit të diskutojnë për **veprimet e grupit**, pra për sukseset e arritura ose për "dështimet". Po ashtu nxënësit duhet të diskutojnë se çfarë veprime duhet të ndërmarrin në të ardhmen për të arritur më shumë sukses.

Hulumtimet e shumta evidentojnë shumë përparësi të të nxënit në bashkëpunim, si:

- Përmirëson të kuptuarit e nxënësve.
- Rrit vetëbesimin dhe qasjen pozitive ndaj të nxënit.
- Rrit përgjegjësinë individuale.
- Zhvillon shkathtësitë sociale, etj.

Aktivitetet që promovojnë të nxënit në bashkëpunim mund të realizohen në kuadër të disa strategjive dhe teknikave bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit, si p.sh.

Mendo/Puno në dyshe/Thuaja grupit. Nxënësit mendojnë në mënyrë individuale rreth një çështje, bashkëbisedojnë me shokun/shoqen dhe në fund prezantojnë informacionet para grupit.

Mësimdhënia e ndërsjellë. Njësia ndahet në pjesë. Secili nxënës brenda grupit lexon pjesën e parë, ndërsa nxënësi me numër 1 ka rolin e "mësimdhënësit" për ta sqaruar atë për të tjerët. Procedura vazhdon ngjashëm për pjesët e tjera.

Ndërthurja (Jigsaw). Njësia ndahet në pjesë. Secili nxënës brenda grupit bëhet ekspert për pjesën e tij dhe ka obligim të sqarojë atë për të tjerët. Secili nxënës duhet të dëgjojë me kujdes pjesën e shokut/shoqes për të kuptuar tërë njësinë mësimore.

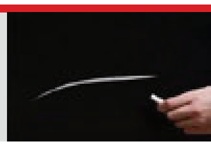
Tryeza e rrumbullakët. Një letër dhe një laps pasohen në mënyrë sistematike te anëtarët e grupit, të cilët shkruajnë ide rreth një çështje të caktuar.

Të nxënit e bazuar në projekte është njëra nga format e të nxënit aktiv. Kjo formë e të nxënit ka filluar të zbatohet kohëve të fundit dhe zakonisht nga mësimdhënësit, të cilët synojnë të pajisin nxënësit me njohuri të thella, si dhe të avancojnë zhvillimin e shkathtësive të tyre. Zbatimi i kësaj forme të të nxënit kërkon që mësimdhënësi së bashku me nxënësit të identifikojnë një temë ose një problematikë, e cila është me interes të hulumtohet. Më pas, hartohet projekti dhe nxënësit në mënyrë individuale ose në grup hulumtojnë informacionet rreth temës ose problematikës së caktuar. Pas një periudhe të caktuar kohore, rezultatet e projektit prezantohen dhe nxënësit pjesëmarrës vlerësohen në bazë të kontributit që kanë dhënë dhe suksesit që ka arritur projekti si tërësi.

Disa nga temat të cilat mund të zhvillohen në projekte në lëndën e matematikës mund të jenë:

- Figurat gjeometrike dhe trupat gjeometrikë
- Përqindja dhe zbatimi i saj në jetën e përditshme
- Zhvillimi historik i matematikës
- Matematika e aplikuar
- Matematika dhe zbatimi i saj në shkencat e natyrës, etj.

Gjatë realizimit të projekteve nxënësit përfitojnë njohuri të reja dhe zhvillojnë shkathtësi të ndryshme, siç janë: shkathtësitë për prezantim dhe komunikim, për organizim dhe menaxhim të kohës, për hulumtim dhe kërkim, për vetvlerësim dhe reflektim, për pjesëmarrje në realizimin e punës së grupit dhe udhëheqje. Të gjitha këto janë shumë të nevojshme për të përgatitur një nxënës sipas kërkesave të shekullit 21.



Pyetjet, detyrat, problemet matematikore

Matematika është lëndë e cila nuk mund të mësohet, nëse informacioni i fituar nuk zbatohet në zgjidhjen e detyrave dhe problemeve të ndryshme. Për këtë arsye, formulimi i pyetjeve, si dhe përzgjedhja e detyrave dhe e problemeve ka rëndësi të jashtëzakonshme me rastin e planifikimit ditor të një njësie mësimore.

Pyetjet dhe teknikat e të pyeturit kanë vlerë të shumëfishtë në orën e matematikës. Një mësimdhënës i kujdesshëm me anën e pyetjeve arrin të kontrollojë të kuptuarit e nxënësve, përkatësisht saktësinë e përvetësimit të informacioneve, shkallën e përvetësimit të tyre, si dhe të identifikojë problemet eventuale me të cila mund të ballafaqohen nxënësit gjatë të nxënit. Duke parashtruar pyetje të niveleve të ndryshme, mësimdhënësi arrin të ketë informacion për shkallën e përparimit të nxënësve, e cila i ndihmon të kontrollojë arritjen e rezultateve të të nxënit.

Mësimdhënësi duhet të bëjë vetëm një numër të kufizuar të pyetjeve të nivelit të ultë dhe ato kryesisht për të verifikuar nëse nxënësit arrijnë të përvetësojnë formulat, rregullat apo konceptet e reja. Edhe pse pyetjet riprodhuese janë të thjeshta, ato kanë rëndësinë e tyre në matematikë, sepse ato ndihmojnë mësimdhënësin të verifikojë saktësinë e përvetësimit të informacionit nga ana e nxënësve. Po ashtu, pyetjet e nivelit të tillë mundësojnë përfshirjen aktive në procesin mësimor të nxënësve që kanë vështirësi në të nxënë. Këto pyetje nxisin përfshirjen e nxënësve të tillë dhe hapin "rrugën" për përparimin gradual të tyre në matematikë. Pyetjet e nivelit të lartë që zakonisht fillojnë me "Si ...?", "Pse...?", dhe "Çfarë" janë pyetje të nivelit të lartë që kërkojnë nga nxënësit të mendojnë dhe të reflektojnë për atë që kanë mësuar. Përgjigjet në këto pyetje tregojnë shkallën e përvetësimit të njohurive nga ana e nxënësve.

Disa mësimdhënës bëjnë shumë pyetje të nivelit të ultë duke u kënaqur me faktin se nxënësit e tyre riprodhojnë saktë informacionin e mësuar. Meqenëse hulumtimet e shumta kanë treguar se një qasje e tillë nuk është e mjaftueshme për të zhvilluar kompetencat e nevojshme tek nxënësit, atëherë mësimdhënësit e tillë duhet ta ndryshojnë atë. Ndryshimi mund të realizohet në forma të ndryshme, njëra prej të cilave është edhe riformulimi i pyetjeve p.sh.

PYETJET E NIVELIT TË ULTË	PYETJET E NIVELIT TË LARTË
Sa është syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe me gjatësi të brinjëve 2m dhe 3m?	Sa është syprina maksimale e sipërfaqes së drejtkëndëshit me perimetër 10m?
Rrumbullaksoni numrin 1.72 në numër me një shifër pas pikës dhjetore.	Cilët numra mund të rrumbullakohen në numrin 1.7?

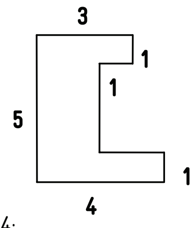
Siç shihet nga tabela e mësipërme, pyetjet e nivelit të ultë kërkojnë nga nxënësit rikujtim dhe zbatim të njohurive, ndërsa ato të nivelit të lartë kërkojnë që nxënësit të analizojnë, zbatojnë, sintetizojnë dhe vlerësojnë informacionin para se të japin përgjigje. Pyetjet e nivelit të lartë ofrojnë mundësinë që mësimdhënësi të zhvillojë te nxënësit shkathtësinë e të menduarit kritik, sepse për t'u përgjegjur saktë nxënësit duhet të mendojnë në mënyrë të thelluar dhe të marrin parasysh shumë faktorë/çështje.

Mësimdhënësi duhet të ketë kujdes me rastin e përgatitjes së pyetjeve. Ato duhet të jenë të qarta, të plota dhe të formuluara drejt. Të gjitha këto elemente ndikojnë që një numër më i madh i nxënësve të përfshihen në procesin mësimor dhe të kontribuojnë me përgjigjet e tyre.

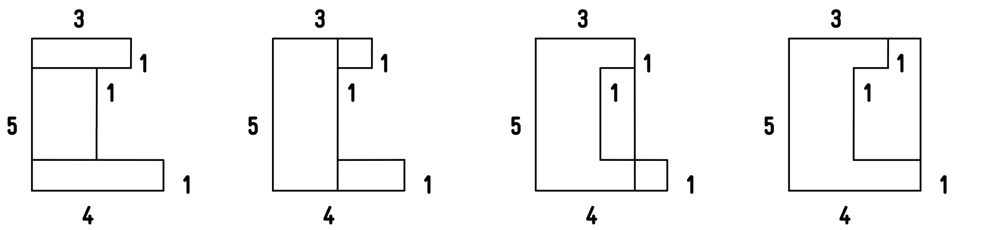
Të nxënit e koncepteve të reja në matematikë shoqërohet me zgjidhjen e shembujve apo detyrave të ndryshme. Zakonisht mësimdhënësit zgjidhin shembuj të ngjashëm duke bërë ndryshime të vogla p.sh. duke ndryshuar vetëm numrat nga ata natyralë, në numra racionalë, dhjetorë, etj. Një gjë e tillë nuk zgjon interesimin e nxënësve për të nxënë, sepse procedurat janë të njëjta. Për ta nxitur kureshtjen e nxënësve për të nxënë, mësimdhënësi duhet të jetë kreativ dhe të zgjedhë shembuj dhe detyra sa më tërheqëse, pikërisht ato që janë në përputhje me interesimet e nxënësve dhe që kanë zbatim në jetën e përditshme. Mësimdhënësi duhet të shfrytëzojë dhe teknologjinë informative dhe të kërkojë nga nxënësit të zgjidhin shembuj dhe detyra përmes shfrytëzimit të faqeve të ndryshme në internet apo softverëve të caktuar, etj. Të gjitha këto elemente e lehtësojnë procesin e të nxënit të nxënësve dhe e bëjnë matematikën më atraktive për ta.

Mësimdhënësi duhet të sqarojë para nxënësve se zgjidhja e detyrave/problemeve matematikore është një proces, i cili fillon me kuptimin e informacioneve që ofrohen në detyrë, me identifikimin e kërkesës që parashtrohet në të dhe me përpjekjen për të shfrytëzuar ato që dimë për të arritur deri te ajo që kërkohet. Nxënësit duhet të kuptojnë se zgjidhja e detyrave është një proces i vazhdueshëm i kërkimit të mënyrave të zgjidhjes, të të provuarit të tyre, të reflektimit ndaj asaj që arrihet, dhe se në këtë proces përveç sukseseve ata mund të ballafaqohen edhe me "ngecje" ose "dështime". Është detyrë e mësimdhënësit që të vetëdijësojë nxënësit se "pengesat" e tilla mund të tejkalohen dhe që të përkrahë nxënësit në përpjekjet e tyre për të pasur sukses.

Në matematikë ka edhe detyra problemore të cilat mund të zgjidhen në disa mënyra. Kështu p.sh. nëse kërkohet nga nxënësit të njehsojnë syprinën e sipërfaqes së dhënë në figurë, atëherë mësimdhënësi duhet të inkurajojë nxënësit të provojnë mënyrat e ndryshme për gjetjen e saj, si p.sh.



Mënyra 1: Mënyra 2: Mënyra 3: Mënyra 4:

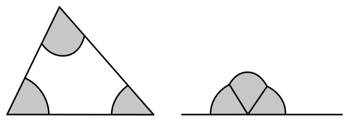


$S = 4\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1$ $\quad S = 2\cdot 5 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1$ $\quad S = 3\cdot 5 + 1\cdot 1 - 3\cdot 1$ $\quad S = 4\cdot 5 - 1\cdot 1 - 3\cdot 2$

$S = 13cm^2$ $\quad S = 13cm^2$ $\quad S = 13cm^2$ $\quad S = 13cm^2$

Gjetja e mënyrave të ndryshme për zgjidhjen e problemeve inkurajon të menduarit e nivelit të lartë të nxënësve, sepse detyrat e tilla i sfidojnë ata për të analizuar marrëdhëniet ndërmjet elementeve të dhëna në problem dhe për të "hulumtuar" modelet e përshtatshme për zgjidhjen e tij.

Në kuadër të detyrave mësimdhënësi mund të përfshijë edhe aktivitete praktike të cilat e konkretizojnë një informacion të ri, p.sh. nëse mësimdhënësi duhet të sqarojë rregullën për shumën e këndeve të brendshme të trekëndëshit, atëherë është mirë që si detyrë të jetë edhe aktiviteti ku nxënësit i presin këndet e brendshme të trekëndëshit dhe i vendosin ato mbi një vijë të drejtë. Vizualizimi ndihmon jashtëzakonisht shumë nxënësit që të kuptojnë rregullën dhe ta mbajnë në mend për një kohë të gjatë.



Për të lehtësuar procesin e zgjidhjes së detyrave, mësimdhënësi duhet të shfrytëzojë mundësinë e ilustrimit të detyrës, skicimit të saj apo shfrytëzimit të modeleve të ndryshme që e konkretizojnë atë. Kohëve të fundit, shtimin e interesimit të nxënësve për të zgjidhur detyrat e ka forcuar edhe përdorimi i teknologjisë informative në zgjidhjen e tyre. Kjo është një përparësi që mësimdhënësit duhet ta shfrytëzojnë në mënyrë efikase.

Vlerësimi i të nxënit të nxënësve

Pjesa më e vështirë dhe më delikate e procesit mësimor është vlerësimi. Vlerësimi është i vështirë, sepse gjatë realizimit të tij mësimdhënësi duhet të shqyrtojë jo vetëm përfitimin e njohurive nga ana e nxënësve, por edhe shkallën e përgjithshme të zhvillimit të kompetencave të tyre. Është delikat, sepse me anën e vlerësimit mund të ndikojmë në anën emocionale të nxënësve dhe në "gatishmërinë" e tyre për ta mësuar matematikën. Përkundër këtyre fakteve, mësimdhënësit duhet ta bëjnë vlerësimin e nxënësve gjatë procesit mësimor.

Ekzistojnë lloje të ndryshme të vlerësimit të nxënësve, të cilat mund të klasifikohen në dy kategori të mëdha: vlerësimi formues (formativ) që realizohet gjatë orëve mësimore dhe ai përmbledhës (sumativ), i cili organizohet pas një periudhe të caktuar kohore. Përdorimi i llojit të parë të vlerësimit ka për qëllim përcjelljen e vazhdueshme të zhvillimit të kompetencave të nxënësve. Përmes tij synohet të identifikohen anët e forta të nxënësve, si dhe vështirësitë me të cilat mund të ballafaqohen ata gjatë procesit mësimor. Nëse identifikohen vështirësitë, atëherë mësimdhënësi mund të bëjë ndryshimet e nevojshme për t'i tejkaluar ato. Ndërsa vlerësimi sumativ ka për qëllim të japë informacion të përgjithshëm mbi suksesin e nxënësve gjatë një periudhe të caktuar kohore.

Mësimdhënësit e matematikës, për dallim nga shumica e kolegëve të tyre, përveç vlerësimit përmbledhës kanë përdorë edhe vlerësimin formativ të nxënësve. Natyra dinamike e zhvillimit të lëndës, kryesisht e bazuar në bashkëveprimin e mësimdhënësit dhe nxënësve në zgjidhjen e shembujve dhe detyrave të ndryshme ka bërë që mësimdhënësit në mënyrë të vazhdueshme të përcjellin përparimin e nxënësve në matematikë. Mirëpo, vlerësimi i bërë brenda orës mësimore ka qenë kryesisht rutinor dhe mësimdhënësi ka qenë i vetmi vlerësues.

Sot, për të zbatuar kornizën e kurrikulit të Kosovës, kërkohet që mësimdhënësit të fokusohen në zhvillimin e kompetencave të të gjithë nxënësve. Për të arritur këtë, mësimdhënësit duhet të jenë të kujdesshëm që në planin ditor të përfshijnë edhe mënyra të ndryshme të vlerësimit, të cilat do t'i ndihmojnë për të vlerësuar jo vetëm njohuritë, por edhe shkathtësitë dhe shprehitë e nxënësve.

Derisa vlerësimi i njohurive është më i lehtë, dhe mund të realizohet përmes parashtrimit të pyetjeve, angazhimit në zgjidhjen e detyrave, organizimit të testeve dhe detyrave kontrolluese, mbetet detyrë më e vështirë për mësimdhënësit të gjejnë mënyra të përshtatshme për të vlerësuar shkathtësitë e nxënësve, si p.sh. aftësinë e nxënësve për të menduar në mënyrë kritike, për të zgjidhur detyra, për të hulumtuar informacione, për të përdorur teknologjinë informative, si dhe të shprehive të ndryshme për kryerjen e detyrave individuale, në dyshe dhe në grup. Vlerësimi i këtyre elementeve te nxënësit do të ndihmojë mësimdhënësin të gjykojë për shkallën e zhvillimit të kompetencave të nxënësve dhe të orientojë punën e tij në drejtim të avancimit të tyre.

Mësimdhënësit duhet të jenë kreativ në gjetjen e formave të ndryshme të vlerësimit brenda orës mësimore. Ata/ato duhet të përdorin instrumente të ndryshme për vlerësim, si dhe të përfshijnë nxënësit në procesin e vlerësimit. Përveç formave standarde të vlerësimit të përmendura më sipër, mësimdhënësit mund të përdorin edhe këto forma: angazhimin e nxënësve në krijimin e modeleve (maketeve), në hulumtimin e informacionit në internet, në identifikimin dhe formulimin e shembujve nga jeta praktike në të cilat zbatohen konceptet dhe rregullat matematikore, prezantimin e zgjidhjes së detyrave, pjesëmarrjen në diskutime, angazhimin e nxënësve për të ndihmuar shokët/shoqet që kanë vështirësi në të nxënë, etj.

Për të vleresuar nxënësit në mënyrë sa më objektive, mësimdhënësit duhet të përdorin instrumente të ndryshme të vlerësimit. Përveç instrumenteve standarde që janë testet dhe detyrat kontrolluese, mësimdhënësit është mirë të praktikojnë edhe vlerësimin e dosjes së përgatitur nga nxënësi, vlerësimin e modeleve të përgatitura nga ata (p.sh. ndërtimi i trupave gjeometrikë), realizimin e projekteve dhe prezantimet e tyre, kryerjen e detyrave të shtëpisë, etj.

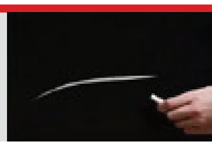
Mësimdhënësi duhet të jetë i kujdesshëm për të vëzhguar çdo angazhim të nxënësve në aktivitete të ndryshme, pa marrë parasysh nëse nxënësi është i përfshirë në to në mënyrë individuale, në dyshe apo në grup. Për të realizuar këtë në mënyrë objektive është mirë që mësimdhënësi të përfshijë nxënësit në procesin e vlerësimit. Kjo mund të realizohet përmes aftësimit të nxënësve për të bërë vetëvlerësim, vlerësim objektiv të punës së kryer nga shoku/shoqja, vlerësimin e punës së bërë në grup, etj. Përfshirja e nxënësve në procesin e vlerësimit ndihmon aftësimin e tyre për të reflektuar rreth punës individuale dhe punës së të tjerëve. Reflektimi ndaj rezultateve të arritura u ndihmon nxënësve që të kenë kujdes në realizimin me sukses të detyrave në të ardhmen.

Realizimi i vlerësimit formues brenda orës mësimore kërkon punë dhe angazhim. Kryerja e tij në mënyrë të vazhdueshme i shërben jashtëzakonish shumë vlerësimit përmbledhës, sepse gjatë vlerësimit formues nxënësit përforcojnë njohuritë dhe evidentojnë "zbrazëtirat", të cilat duhet t'i plotësojnë. Kjo ndihmon që ata të mos jenë të befasuar gjatë vlerësimit përmbledhës.

Për të realizuar një vlerësim formativ sa më efikas, mësimdhënësi duhet që në planin ditor të shënojë pyetjet që do t'ju parashtrojë nxënësve, shembujt dhe detyrat problemore. Një gjë e tillë e ndihmon atë të parashikojë sasinë e pyetjeve, nivelin e tyre dhe momentet e përshtatshme për t'i drejtuar ato. Përmes pyetjeve mësimdhënësi arrin të kontrollojë të kuptuarit e nxënësve, shkallën e përvetësimit të njohurive nga ana e tyre, si dhe të identifikojë problemet e ndryshme me të cilat mund të ballafaqohen nxënësit gjatë procesit mësimor. Varësisht nga përgjigjet, mësimdhënësi mund të ndryshojë procesin e mësimdhënies në mënyrë që t'ia përshtatë atë mundësive të nxënësve dhe nevojave të tyre. Po ashtu, është me rëndësi që mësimdhënësi të inkurajojë nxënësit për të bërë pyetje. Aftësia e nxënësve për të bërë pyetje "të mira" ofron shumë informacion për nivelin e të menduarit të tyre. Për mësimdhënësit është e njohur shprehja "më mirë një pyetje e mirë, se 10 përgjigje të sakta". Po ashtu, zgjedhja e shembujve të përshtatshëm ndihmon konkretizimin e koncepteve të ndryshme, gjë e cila lehtëson të kuptuarit dhe të nxënit e informacionit nga ana e nxënësve. Ndërsa, me rastin e planifikimit të detyrave për t'u zgjidhur në klasë, mësimdhënësi duhet të ketë parasysh të caktojë ato detyra të cilat do të jenë në funksion të ndërtimit gradual të njohurive të nxënësve dhe zhvillimit të shkathtësive të tyre.

Për të përcjellur angazhimin e vazhdueshëm të nxënësve në procesin mësimor, mësimdhënësi duhet të përdorë rubrikat e ndryshme, në të cilat shënon aspektet e ndryshme të vlerësimit të punës së nxënësve brenda orës dhe në periudha të caktuara kohore. Mbajtja me rregull e tyre ndihmon jashtëzakonisht shumë në zbutjen e "stresit" që krijohet me rastin e vlerësimit përfundimtar të nxënësve, sepse mësimdhënësit kanë një pasqyrë më të qartë rreth procesit të përfitimit të njohurive nga ana e nxënësve, si dhe zhvilimit të kompetencave të tyre.

Planifikimi i një ore mësimore fillon me hartimin e rezultateve të të nxënit dhe përfundon me zgjedhjen e mënyrave të ndryshme të vlerësimit. Për të bërë një gjë të tillë nuk ka një formulë standarde. Përvoja në punë, bashkëpunimi me kolegë, pjesëmarrja në programe për zhvillim profesional në vend dhe jashtë, hulumtimi i literaturës janë disa nga elementet që ndihmojnë mësimdhënësin të bëhet "mjeshtër" në profesionin e tij.



Testi – Instrument vlerësimi

Testimi është njëra nga format më të përhapura të vlerësimit të nxënësve. Në praktikën e tyre, mësimdhënësit e përdorin shumë shpesh testimin, sepse një gjë e tillë ofron mundësinë e vlerësimit objektiv të njohurive të nxënësve, si dhe për një kohë të shkurtë mund të bëhet vlerësimi i të gjithë nxënësve për disa tema, një kapitull apo edhe më shumë. Testimi është formë e vlerësimit objektiv, sepse mësimdhënësi në test ofron detyrat e caktuara për një grup të nxënësve, pikat për vlerësimin e zgjidhjeve të detyrave, si dhe legjendën për rezultatin e arritur. Kjo ofron mundësinë që mësimdhënësi të jetë objektiv në vlerësimin e nxënësve, sepse përmes testit mësimdhënësi vlerëson punën e bërë duke e bazuar në kriteret e vlerësimit të caktuar paraprakisht. Nëse një test është i përpiluar mirë dhe ka të caktuara të gjitha elementet e tij, atëherë llogaritjen e rezultatit mund ta bëjë edhe vetë nxënësi. Testi ofron mundësi që puna e nxënësve të vlerësohet edhe nga mësimdhënësit e tjerë të matematikës duke ofruar objektivitet maksimal në vlerësimin e punës së tyre.

Për të hartuar një test, mësimdhënësi duhet të ketë kujdes që së pari të përgatisë matricën e testit. Kjo matricë përmban temat, përmbajtjet e të cilave do të testohen, si dhe numrin e pyetjeve dhe detyrave sipas niveleve të të nxënit dhe temave. Përgatitja e matricës së testit varet nga shumë faktorë, si p.sh. volumi i përmbajtjes që testohet, rëndësia e temave që përfshihen në vlerësim, përmbajtja e temave, koha në dispozicion, etj. Një matricë e testit mund të ketë formën:

	NIVELI I ULTË (67% TË PËRMBAJTJES)	NIVELI I LARTË (33% TË PËRMBAJTJES)	NUMRI I PYETJEVE DHE DETYRAVE (SIPAS TEMAVE)
Tema 1	3	1	4
Tema 2	2	1	3
Tema 3	2	1	3
Tema 4	1	1	2
Numri i pyetjeve dhe detyrave (sipas niveleve)	8	4	12

Matrica e testit i orienton mësimdhënësit në hartimin e tij. Caktimi i numrit të pyetjeve dhe detyrave sipas njësive mësimore dhe niveleve të të nxënit e lehtëson jashtëzakonisht shumë punën e mësimdhënësve në përpilimin e testit. Kjo për arsye se, në vend që mësimdhënësi të shqyrtojë njëkohësisht 4 njësi mësimore për të hartuar pyetje dhe zgjedhur detyra të ndryshme, të cilat duhet klasifikuar sipas rëndësisë dhe nivelit të të nxënit, ai fokusohet në hartimin e pyetjeve dhe detyrave sipas njësive mësimore. Dhe pas caktimit të pyetjeve dhe detyrave sipas njësive mësimore, mësimdhënësi duhet të shqyrtojë edhe njëherë testin si tërësi dhe të sigurohet se pyetjet e nivelit të ultë përfshijnë përafërsisht 67% të përmbajtjes së njësive që testohen, ndërsa pyetjet e nivelit të lartë përfshijnë pjesën tjetër të përmbajtjes.

Pas përgatitjes së matricës së testit, mësimdhënësit duhet të kenë kujdes në përpilimin e testit dhe atë jo vetëm nga ana përmbajtësore, por edhe nga ana vizuale. Me rastin e shkrimit të pyetjeve dhe detyrave duhet të përdoren fontet dhe madhësia standarde e shkronjave. Po ashtu, është e këshillueshme që testi të mos jetë i mbingarkuar me tekst dhe mundësisht të përfshihen në të vizatime/ilustrime/grafikë të ndryshëm, të cilat përveç që janë në funksion të sqarimit të problemit i kontribuojnë edhe anës vizuale të testit.

Mësimdhënësit duhet të jenë kreativ në përpilimin e një testi. Ata duhet të përfshijnë në test pyetje dhe detyra të llojeve të ndryshme, të cilat zgjojnë interesimin e nxënësve për t'u përfshirë në realizimin me sukses të kërkesave të testit. Disa nga llojet e pyetjeve dhe detyrave mund të jenë:

1) Detyra ku kërkohet renditja e fjalëve në fjali, psh.
kënd, ka, kënddrejtë, quhet, trekëndëshi, të drejtë, një, i cili, trekëndësh,

____

2) Detyra me plotësim, p.sh.
Brinjën më të gjatë të trekëndëshit kënddrejtë e quajmë _________, ndërsa dy brinjët e tjera i quajmë

__________.

ose

Trekëndëshat sipas gjatësisë së brinjëve ndahen në:

____

____

__________________ .

3) Detyra ku kërkohet të shkruhet një përkufizim, p.sh.

Teorema e Pitagorës thotë:

____

____

4) Detyra me shoqërim, p.sh.
Në anën e majtë janë dhënë gjatësitë e kateteve të disa trekëndëshave kënddrejtë, ndërsa në anën e djathtë gjatësitë e hipotenuzave. Duke përdorë Teoremën e Pitagorës, shoqëroni përgjigjet e sakta:

a) 2cm, 3cm   1) 5cm
b) 2cm, 4cm   2) $2\sqrt{5}$cm
c) $\sqrt{2}$ cm, 1cm   3) $\sqrt{13}$cm
d) 3cm, 4 cm   4) $\sqrt{3}$ cm

5) Detyra me rrumbullaksim (me alternativa), ku kërkohet rrumbullaksimi i përgjigjes së saktë, p.sh.

Cila treshe e numrave të mëposhtëm paraqet numra të Pitagorës (numra që paraqesin gjatësi të brinjëve të trekëndëshave kënddrejtë)

a) 3,5,6
b) 1,3,5
c) 8,15,17
d) 5,7,11.

6) Detyra me plotësim të tabelës, p.sh.

Plotësoni tabelën duke pasur parasysh se dy kolonat e para janë gjatësitë e brinjëve të trekëndëshave kënddrejtë, ndërsa shtylla e tretë është gjatësia e brinjës më të gjatë.

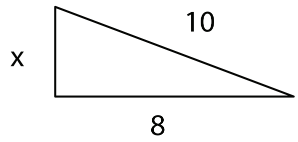
A	B	C
1		$\sqrt{5}$
	1.5	2.5
9	11	

7) Detyra me vizatim, p.sh.

Në boshtin numerik të dhënë, vizatoni gjatësitë e segmenteve $\sqrt{2}$cm, $\sqrt{3}$cm, $\sqrt{5}$cm.

8) Detyra për konstruktim, p.sh.
Konstruktoni trekëndëshin kënddrejtë me gjatësi të katetes a= $\sqrt{2}$cm dhe hipotenuzë c=$\sqrt{6}$cm.

9) Detyra ku kërkohen njehsime të ndryshme, p.sh.
Gjeni gjatësinë e x nga figura e dhënë.
ose



Njehsoni perimetrin dhe syprinën e sipërfaqes së trekëndëshit barakrahësh nëse dihet se a=20cm, h=25cm.

Llojet e detyrave të mësipërme janë përpiluar për të vlerësuar njohuritë e nxënësve rreth Teoremës së Pitagorës dhe zbatimit të saj. Këto lloje të detyrave mund të përdoren edhe në vlerësimin e njohurive të nxënësve rreth temave dhe koncepteve të tjera.
Kjo listë e detyrave nuk është përfundimtare. Mësimdhënësit mund të gjejnë edhe detyra të llojeve të tjera. Varësisht nga temat që përfshihen në test, mësimdhënësit mund të kërkojnë që nxënësit të vizatojnë grafikë të ndryshëm, të zgjidhin detyra me ndihmën e diagrameve, të transformojnë detyrat problemore në "gjuhën algjebrike" dhe të zgjidhin ato, të gjejnë shembuj nga jeta ku zbatohen konceptet e ndryshme matematikore, etj.

Pas përpilimit të detyrave, mësimdhënësit duhet të caktojnë pikët për secilën detyrë dhe t'i shënojnë ato anash detyrës. Pikët duhet të caktohen varësisht nga vështirësia e detyrës për t'u zgjidhur. Është e këshillueshme që pikat për detyra të klasifikohen sipas katër kategorive, nga dy kategori për secilën nga dy nivelet e të nxënit. Po ashtu, është mirë që detyrat e kategorive të njëjta të kenë të njëjta pikë.

Në fund caktohet edhe legjenda e testit, pra notat në varësi të përqindjes së pikëve që kanë fituar nxënësit. Nuk ka rregull që përcakton lidhshmërinë e notave me përqindjen e pikëve të fituara. Kjo më shumë varet nga synimi që ka mësimdhënësi në testimin e nxënësve dhe detyrat që ka përzgjedhur për test. Një legjendë e mundshme e testit mund të jetë p.sh.

PIKËT E FITUARA (TË SHPREHURA NË %)	PIKËT E FITUARA	NOTA
0 – 45	0 – 9	1
46 – 55	10 – 11	2
56 – 75	12 – 15	3
76 – 90	16 – 18	4
91 – 100	19 – 20	5

Pikët e caktuara për secilën detyrë si dhe legjenda e testit janë elementet themelore të cilat e bëjnë testin të jetë instrument për vlerësimin objektiv dhe trasparent të nxënësve. Ky objektivitet dhe kjo transparencë vlen për nxënësit, prindërit, strukturat e ndryshme arsimore, si dhe palët e tjera me interes.

Këshilla për mësimdhënës për të inkurajuar nxënësit për të mësuar lëndën e matematikës

Secila klasë në shkollë, e në mënyrë të veçantë ato të nivelit të përgjithshëm të shkollimit 6-9, përbëhen nga nxënës të cilët kanë aftësi dhe prirje të ndryshme për të mësuar lëndët e caktuara. Derisa në nivelin e shkollimit fillor, klasat 1-5, aftësitë dhe prirjet e nxënësve janë më pak të theksueshme, në nivelin e shkollës së mesme të ultë ato vetëm arrijnë të kristalizohen dhe të jenë përcaktuese për nxënësit në zgjedhjen e drejtimeve në shkollimin e mesëm të lartë dhe të karrierës së tyre në përgjithësi.

Dallimet e nxënësve në përvetësimin e njohurive dhe shkathtësive të ndryshme janë sidomos të theksuara në lëndën e matematikës. Në secilën klasë ka një numër shumë të kufizuar të nxënësve të cilët kanë talent në këtë lëndë, një pjesë relativisht e madhe e tyre kanë aftësi mesatare në përvetësimin e saj, ndërsa po ashtu ka edhe shumë nxënës të cilët kanë vështirësi në të mësuarit e matematikës. Duke qenë klasat me një përbërje të tillë, atëherë mësimdhënësit e matematikës kanë qenë të fokusuar që mësimdhënien e tyre ta koncentrojnë kryesisht në zhvillimin e aftësive të nxënësve me aftësi mesatare, duke lënë pak anash punën me nxënësit e tjerë. Derisa zhvillimin e talenteve mësimdhënësit janë munduar ta përkrahin me angazhimin e herë pas hershëm të nxënësve të tillë në zgjidhjen e detyrave të vështira gjatë orës së mësimit ose dhënien e detyrave të tilla për t'u zgjidhur në shtëpi, mësimdhënësit e kanë pasur shumë të vështirë të përfshijnë në procesin mësimor nxënësit që kanë pasur vështirësi në të nxënë. Organizimi i orës mësimore sipas metodologjisë tradicionale ka ofruar shumë pak hapësirë për mësimdhënësin që të përfshijë në procesin mësimor të gjithë nxënësit. Zakonisht janë përfshirë nxënësit e talentuar dhe ata me aftësi relativisht të mira në përvetësimin e njohurive dhe shkathtësive në matematikë, ndërsa të tjerët kanë qenë "nxënësit e heshtur".

Një heterogjenitet i aftësive të nxënësve të një klase për të përvetësuar lëndën e matematikës ekziston edhe sot. Edhe pse një gjë e tillë e vështirëson punën e mësimdhënësit, ajo nuk duhet t'i dekurajojë ata. Përkundrazi për të arritur sukses në punën e tyre mësimdhënësit duhet të mobilizohen për të kuptuar më mirë aftësitë e nxënësve, stilet e tyre të nxënit, prirjet dhe interesimet e tyre. Njohja e këtyre elementeve dhe organizimi i mësimdhënies dhe të nxënit duke respektuar këto veçori të nxënësve e ndihmojnë mësimdhënësin që ta bëjë matematikën sa më atraktive dhe më të lehtë për ta mësuar nga ana e nxënësve.

Një mësimdhënës i kujdesshëm arrin të gjejë mënyra të përshtatshme për të ndihmuar zhvillimin e potencialit të të gjithë nxënësve për të përparuar në të mësuarit e matematikës. Një planifikim i kujdesshëm i orës mësimore, përdorimi i formave të ndryshme të punës, si dhe zbatimi i metodave, teknikave dhe strategjive bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit ofron mundësi, që mësimdhënësi:

- të nxitë nxënësit e talentuar të zgjerojnë njohuritë e tyre në matematikë,
- të përkrahë nxënësit me aftësi mesatare të zhvillojnë njohuritë dhe shkathtësitë e tyre në këtë lëndë,
- të ndihmojë nxënësit që kanë vështirë në të nxënë të bëjnë përparim gradual në përvetësimin e koncepteve themelore dhe më pas të motivojnë ata për të vazhduar më tutje me të mësuarit e kësaj lënde.

Përvoja në punë është "këshilltari" më i mirë për të udhëzuar mësimdhënësit si të ofrojë ndihmë nxënësve me aftësi të ndryshme për të pasur sukses në të nxënit e matematikës. Meqë mësimdhënësit kanë më shumë njohuri për punë me nxënës që kanë aftësi mesatare, atëherë është parë e arsyeshme që në këtë material të ofrohen disa këshilla për mësimdhënës se si të punohet me talent dhe me nxënës që kanë vështirësi në të nxënë.

Për të inkurajuar të nxënit e nxënësve që kanë talent në matematikë, mësimdhënësit duhet:

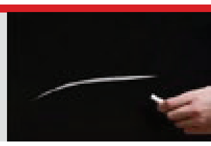
- të përgatisin detyra të veçanta, të cilat sfidojnë nxënësit në zgjidhjen e tyre,
- të kërkojnë nga nxënësit që aty ku ka mundësi të zgjidhin të njëjtën detyrë në mënyra të ndryshme,
- të udhëzojnë nxënësit që aty ku ka mundësi të paraqesin zgjidhjen e detyrës në forma të ndryshme,
- të motivojnë nxënësit për të bërë pyetje rreth temave të ndryshme,
- të nxisin nxënësit për të diskutuar rreth koncepteve të ndryshme matematikore dhe për të gjetur argumentet e duhura,
- të angazhojnë nxënësit në krijimin e mjeteve të ndryshme të punës, të cilat ndihmojnë konkretizimin e lëndës,
- të ndihmojnë nxënësit që të përdorin fjalorin e tyre në formulimin e saktë të përkufizimeve, rregullave, etj.
- të inkurajojnë nxënësit që përmes shembujve të formulojnë hipoteza rreth proceseve të ndryshme dhe të gjejnë mënyrat e vërtetimit të tyre,
- të inkurajojnë nxënësit në gjetjen dhe formulimin e shembujve ku kanë zbatim në jetë konceptet dhe rregullat e ndryshme matematikore,
- të nxisin nxënësit për të kërkuar informacione shtesë,
- të këshillojnë nxënësit që të përdorin uebfaqe të ndryshme, të cilat ndihmojnë përforcimin dhe zgjerimin e njohurive të fituara,
- të kërkojnë nga nxënësit realizimin e projekteve të ndryshme nga matematika, si dhe projekteve shumë dimensionale në të cilat së bashku me lëndët e tjera është e integruar edhe lënda e matematikës,
- të angazhojnë ata në rolin e mësimdhënësit për të ndihmuar nxënësit që kanë vështirësi në të nxënë,
- të kërkojnë dhe të ndihmojnë nxënësit që të zgjidhin detyra që kanë qenë pjesë e garave e ndryshme,
- të përgatisë nxënësit për pjesëmarrje në gara të ndryshme.

Për të përkrahur të nxënit e nxënësve që kanë vështirësi në të nxënit e matematikës, mësimdhënësi duhet:

- të ofrojë detyra të lehta, të cilat do të motivonin përfshirjen e këtyre nxënësve në procesin mësimor,
- të përgatisin detyra të cilat u përgjigjen aftësive individuale të këtyre nxënësve,
- të përcjellin përparimin gradual të këtyre nxënësve dhe të inkurajojnë cilëndo përpjekje të tyre për të përparuar në matematikë,
- të praktikojnë metoda, teknika dhe strategji të reja të mësimdhënies të cilat mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor,
- të përdorin formën e punës në dyshe, ku ekipi formohet nga një nxënës i suksesshëm dhe një me vështirësi në të nxënë,
- të caktojnë role të ndryshme për këta nxënës për të dhënë kontributin e tyre në realizimin e detyrave në grup (kryerjen e vizatimeve, prezantimin, mbajtjen e shënimeve, etj).
- të përfshijnë nxënësit në diskutime të ndryshme dhe të inkurajojnë ata në dhënien e mendimeve të tyre,
- të inkurajojë këta nxënës për të bërë pyetje për mësimdhënësin ose shokët dhe shoqet e tyre,
- të angazhohen në krijimin e modeleve të thjeshta që mund të përdoren për konkretizimin e koncepteve të ndryshme,
- të përdorin vizualizimin me rastin e konkretizimit të koncepteve dhe rregullave të ndryshme,
- të kërkojë që nxënësit për detyrë shtëpie të zgjidhin detyra të lehta,
- të angazhojnë nxënësit në hulumtimin e informacioneve të thjeshta në internet,
- të përgëzojnë nxënësit për çdo sukses të arritur,
- të bashkëpunojnë me prindërit dhe profesionistët e caktuar për të kuptuar psikologjinë e fëmijës dhe për të diskutuar mënyrat më të përshtatshme për ta ndihmuar përparimin e tij në matematikë.

Me siguri që ka edhe shumë këshilla të tjera, të cilat ndihmojnë mësimdhënësit si të punojnë me nxënës që kanë aftësi të ndryshme të nxënit. Si dhe në çdo profesion tjetër, edhe në profesionin e mësimdhënësit përvoja është "mësuesi" më i mirë. Gjatë përvojës arrijmë të kuptojmë më mirë individualitetin e nxënësve tanë dhe ta organizojmë procesin mësimor në atë mënyrë që ta përshtatim atë nevojave dhe interesimeve të tyre.

Për të udhëzuar mësimdhënësit se si të planifikojnë realizimin e njësive mësimore për klasat 6-9 janë dhënë në vazhdim disa mësime model. Përveç mësimeve model është dhënë edhe një test model për klasën e VIII. Më pas është dhënë dhe forma e gatshme për përgatitjen e mësimeve model.



Një formë e komunikimit efektiv

Mundësia për ta shprehur një qëndrim, mendim, për të dhënë apo pranuar porosinë realizohet përmes komunikimit.
Komunikimi efektiv në shkollë, si një element i rëndësishëm i kulturës së komunikimit ndërmjet mësimdhënësve dhe nxënësve përfshin tri elemente:

1. Kanalet, mjetet, mënyrat dhe stilet efektive të komunikimit;
2. Komunikimi efektiv i cili ndihmon në zgjidhjen e problemeve dhe mosmarrëveshjeve në shkollë, dhe i fundit, por jo me më pak rëndësi
3. Të dëgjuarit aktiv të komunikuesit, në rastin tonë të dëgjuarit aktiv të mësimdhënësve ndaj nxënësve, si dhe të dëgjuarit aktiv të drejtorëve dhe personelit tjetër të shkollës.

Komunikimi efektiv përmirëson dhe avancon tërë ambientin e nxënies për nxënësit dhe avancon potencialin mësimor që ka çdo nxënës. Një aftësi e rëndësishme për mësimdhënësit për ta zotëruar komunikimin është "të dëgjuarit aktiv". Kur mësimdhënësit dëgjojnë në mënyrë aktive, fëmijët mund të ndiejnë që janë të rëndësishëm dhe në këtë mënyrë do të kenë vëmendjen e plotë tek procesi i të nxënit. Shumë probleme mund të zgjidhen dhe të parandalohen nëse mësimdhënësit ndajnë kohën që të dëgjojnë në mënyrë aktive. E rëndësishme është kur mësimdhënësi është një dëgjues aktiv, kur ai është i gatshëm që t'i udhëzojë nxënësit për zgjidhjen e problemeve për veten e tyre. Janë katër hapa për ta zotëruar këtë aftësi: **Ndalo**, **Shiko**, **Dëgjo** dhe **Përgjigju**.

NDALO	Kur një mësimdhënës/nxënës ju afrohet me diçka, ndalo dhe kushtoji vëmendje. Duke i kushtuar vëmendje, madje edhe shkurtimisht, i bën folësit të kuptojë që po e dëgjoni dhe që ai është i rëndësishëm.
SHIKO	Sigurohuni që të bëni kontakt me sy me atë që komunikoni. Kjo mund të kërkojë rënien në nivelin e tyre dhe përballje direkte me ta. Një shprehje e fytyrës mund t'i nxisë fëmijët që t'i ndajnë ndjenjat dhe shqetësimet e tyre.
DËGJO	Përqendroni vëmendjen tuaj në atë se çfarë thonë njerëzit me të cilët ju komunikoni, duke i dëgjuar fjalët dhe tonet e tyre. Dëgjoni me kujdes atë çfarë thonë fëmijët në të vërtet, e gjithashtu edhe atë çfarë përpiqen të thonë. Shprehjet e fytyrës dhe gjuha trupore japin informata të mjaftueshme rreth fjalëve që ju dëgjoni.
PËRGJIGJU	Pasi që jeni ndalur, keni shikuar dhe dëgjuar është koha që të përgjigjeni varësisht nga ajo se çfarë ka thënë nxënësi, një përgjigje aktive do të ishte:...

Pastaj vazhdoni me hapat e tjerë të komunikimit.

PARAFRAZO	**Çfarë keni dëgjuar (kjo mund të përfshijë ndihmën për nxënësin që të emërtojë ndjenjën e tij/saj ose të përshkruajë një situatë.** Kjo e bën folësin të ndihet se është dëgjuar qartë dhe që ndjenjat që i ka shprehur janë të pranueshme.
JEP SHEMBUJ	**Kur është e përshtatshme, bëj një pyetje** që do të shtyjë nxënësin të mendojë vetë për një zgjidhje ose për hapin e ardhshëm. "Si mund të na siguroni se ju nuk do t'i harroni prapë detyrat e shtëpisë?", " Çka keni mësuar nga kjo përvojë?, " Si do ta ndryshonit këtë nëse do ta bënit prapë?", " Çfarë ju pëlqen më shumë në shkrimin tuaj? Na trego pse?" "Si mund të na siguroni se ju nuk do t'i harroni prapë detyrat e shtëpisë?", " Çka keni mësuar nga kjo përvojë?, " Si do ta ndryshonit këtë nëse do ta bënit prapë?", " Çfarë ju pëlqen më shumë në shkrimin tuaj? Na trego pse?"

Klasa: VI

Njësia mësimore: Prodhimi kartezian i dy bashkësive

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- identifikojnë dyshen e renditur dhe komponentet e saj,
- përkufizojnë barazimin ndërmjet dy dysheve të renditura,
- njehsojnë prodhimin kartezian të dy bashkësive,
- gjejnë lidhjen në mes të numrit të elementeve të bashkësive A, B dhe AxB.

Fjalët kyçe: Dyshe e renditur, komponentja e dyshes së renditur, prodhimi kartezian.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, tabela e shahut, një ilustrim, fletët e ekspertit, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi paraqet para nxënësve një ilustrim, i cili përmban shembuj të vendosjes së një palë këpucëve dhe të dy duarve që mbajnë një bimë.

Më pas pyet nxënësit:

- A ekziston një rregull për renditjen e këpucëve? A është njëjtë nëse këpucët i rendisim ndryshe?
- Si duhet pozicionuar duart nëse dëshirojmë të mbajmë diçka mbi to?

Përmes shembujve mësimdhënësi së bashku me nxënësit mund të formulojnë dy përfundime:

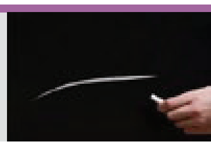
1. Ka disa raste në jetë në të cilat ekziston një rregull në renditjen e dy elementeve.
2. Në disa raste, nuk është njëjtë nëse dy elemente i rendisim në mënyra të ndryshme.

Realizimi i kuptimit - 20 min

Mësimdhënësi shfrytëzon shembujt e mësipërm për të sqaruar konceptin e dyshes së renditur, si shprehje në të cilën respektohet renditja e shoqërimit të dy elementeve:

$$(x, y)$$

komponentja e parë komponentja e dytë



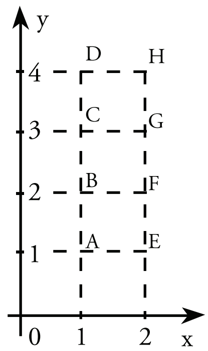
Nxënësve duhet t'u bëhet e qartë se te dyshet e renditura, renditja e komponentëve është thelbësore. Pra, për $x \neq y$ kemi $(x, y) \neq (y, x)$, sepse komponentet përkatëse nuk janë të barabarta.

Mësimdhënësi shënon në tabelë bashkësitë $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ dhe tabelën e mëposhtme. Ai/ajo kërkon që nxënësit ta plotësojnë këtë tabelë:

	1	2	3	4
1	(1,1)			
2				

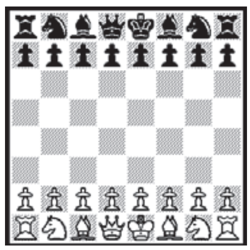
Mësimdhënësi shënon rezultatet e fituara në formën e dysheve:

AxB = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)}



Ky është një shembull i mirë për të sqaruar konceptin e prodhimit kartezian të bashkësive A dhe B, mënyrën e gjetjes së këtij prodhimi, si dhe paraqitjen e dysheve të renditura në sistemin koordinativ Oxy.

Për të kuptuar se sa janë nxënësit e aftë të gjejnë vetë prodhimin kartezian të dy bashkësive, mësimdhënësi kërkon që nxënësit në mënyrë individuale të gjejnë **AxB**, për $A = \{a,b,c\}$ dhe $B = \{1\}$. Pas përfundimit të detyrës, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të shkëmbejnë fletoret me një bashkëmoshatarë për të krahasuar rezultatet.



Mësimdhënësi paraqet para nxënësve tabelën e shahut dhe kërkon nga 2-3 nxënës që të shënojnë me anën e dysheve të renditura disa nga fushat e tij, p.sh. (A,3), (F,7), (G,2), etj.

Ai/ajo tregon se dyshet e renditura përdoren edhe në caktimin e pozitës së karrigeve në teatër, kinema, etj. ku komponentja e parë tregon rreshtin, ndërsa komponetja e dytë numrin e karriges në rresht.

A	B	AxB
2	4	
	8	16
5		30

Është e rëndësishme që mësimdhënësi të ndihmojë nxënësit të gjejnë lidhjen që ekziston në mes të numrit të elementeve të bashkësive **A**, **B** dhe **AxB**. Për këtë arsye, ai/ajo kërkon që nxënësit të plotësojnë tabelën, ku numrat paraqesin numrat e elementeve të bashkësive **A**, **B** dhe **AxB**. Kjo do të ndihmojë nxënësit të kontrollojnë numrin e elementeve që do të fitojnë me rastin e njehsimit të prodhimit kartezian të dy bashkësive. Mësimdhënësi u sqaron nxënësve se

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing.$$

Reflektimi -15 min

Mësimdhënësi ka përgatitur 4 fletë eksperti. Secili grup i nxënësve do të zgjidhë detyrat e një flete të ekspertit.

Grupi I: 1. Gjeni elementet e bashkësisë **A**, nëse:
$AxB = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3),(z,1),(z,2),(z,3)\}$.
2. Sa elemente ka bashkësia **B**?

Grupi II: 1. Gjeni elementet e bashkësisë **B**, nëse:
$AxB = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3),(z,1),(z,2),(z,3)\}$.
2. Sa elemente ka bashkësia **A**?

Grupi III: 1. Gjeni elementet e bashkësisë **A**, nëse:
$BxA = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3),(z,1),(z,2),(z,3)\}$.
2. Sa elemente ka bashkësia **B**?

Grupi IV: 1. Gjeni elementet e bashkësisë $A^2 = AxA$, nëse: $A = \{1,2\}$.
2. Sa elemente ka bashkësia A^2 e dhënë në shembullin 1?

Një përfaqësues i grupit do të shënojë në tabelë zgjidhjet e detyrave të grupit të tij. Në fund mësimdhënësi vlerëson shkallën e arritjes së rezultateve të të nxënit. Ai/ajo plotëson në rast nevoje dhe i këshillon nxënësit:

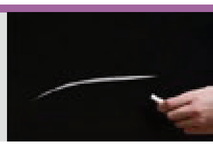
Mbani në mend:

- Prodhimi kartezian i bashkësive A dhe B është bashkësia AxB, e ndërtuar nga dyshet e renditura, ku komponentja e parë është nga bashkësia A, ndërsa komponentja e dytë nga bashkësia B.
- Nëse bashkësia A ka m- elemente, ndërsa bashkësia B ka n-elemente, atëherë bashkësia A x B ka m×n –elemente.

Detyrë shtëpie: Për punë të pavarur nxënësit do të zgjidhin detyrën 1 nga libri i matematikës për klasën e VI. Përveç detyrës 1, nxënësit e talentuar do të zgjidhin edhe detyrat 3 dhe 4.

Reflektimi nga përvoja: Aktivitetet e planifikuara mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin e të nxënit. Plotësimi i tabelës ofron mundësi të aktivizimit të nxënësve që kanë vështirësi në nxënie, ndërsa formulimi i përfundimeve, gjetja e lidhjes në mes të numrit të elementeve të bashkësive A, B dhe AxB, si dhe zgjidhja e detyrave të fletëve të ekspertit sfidojnë nxënësit e talentuar. Të qenit ekspert në zgjidhjen e shembujve të caktuar i motivon nxënësit për t'u përfshirë aktivisht në procesin mësimor, sepse ata e ndiejnë se ekspertiza e tyre është e rëndësishme dhe duhet t'ju tregohet të tjerëve.

Përzgjedhja e aktiviteteve është bërë me qëllim që te nxënësit të zhvillohen aftësitë e krahasimit, analizës dhe zbatimit të njohurive në zgjidhjen e detyrave të ndryshme. Në veçanti, zgjedhja e shembujve nga jeta praktike ofron mundësinë e lidhjes së natyrshme të dijeve dhe përvojave paraprake të nxënësve me konceptet që do të mësohen gjatë orës mësimore. Shembujt e tillë nxisin kureshtjen e nxënësve dhe shtojnë përfshirjen e tyre në procesin mësimor.



Klasa: VI

■ Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- matin gjatësitë e segmenteve,
- krahasojnë gjatësitë e segmenteve,
- gjejnë largësinë ndërmjet dy pikave,
- përdorin saktë njësitë matëse për matjen e gjatësive.

Njësia mësimore: Gjatësia e segmentit, largesa e dy pikave

Fjalët kyçe: Segment, gjatësi e segmentit, largesë ndërmjet pikave.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, vizorja, një vizatim, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi -10 min

Kërkohet që secili nxënës të vizatojë tabelën e mëposhtme dhe ta plotësojë atë duke bërë matjet e duhura.

OBJEKTI	GJATËSIA
Lapsi	
Gishti i madh i dorës	
Pëllëmba e dorës	
Shputa e këmbës	

Pas plotësimit të tabelës, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- Si janë realizuar matjet? Cila ka qenë pika e fillimit gjatë matjes? A ndryshon diçka nëse pika e fillimit dhe ajo e fundit ndërrojnë rolet?
- Çka është fituar gjatë matjeve? Çfarë njësie matëse keni përdorur?
- Çfarë njësie matëse duhet të përdorim për të treguar largësinë në mes të dy qyteteve?
- Çfarë gjatësie kanë objektet e njëjta? A ekzistojnë objekte të ndryshme që kanë gjatësi të barabarta?

Përgjigjet e nxënësve ndihmojnë mësimdhënësin që bashkë me ta të arrijë në përfundimet se:

- Për të gjetur gjatësinë e një objekti të “drejtë” duhet bërë matjen e largësisë së skajeve të tij.
- Gjatë matjes nuk ka rëndësi cila është pika e fillimit dhe cila është pika e fundit.
- Për objektet e ndryshme duhet gjetur njësinë përkatëse të gjatësisë.
- Objektet e njëjta kanë gjatësi të barabarta. E anasjellta nuk vlen gjithmonë.

Realizimi i kuptimit – 20 min

Njësia mësimore është e ndarë në dy pjesë. Nxënësit lexojnë pjesën e parë duke përdorë 4 shenjat:

“ √ “ për informacionin që dinë.

“+” për informacionin që mësuan.

“-“ për informacionin që e kanë ditur ndryshe.

“?” për informacionin e paqartë ose kur kërkojnë më shumë informacion.

Nëse ndonjë nxënës ka informacion që e ka ditur ndryshe ose diçka të paqartë, atëherë anëtarët e tjerë të grupit duhet ta ndihmojnë atë. Nëse mbetet ende diçka pa u sqaruar, atëherë një përfaqësues i grupit e paraqet problemin para tërë klasës. Në fillim kërkohet që nxënësit e grupeve të tjera të japin përgjigje. Nëse ata nuk mund ta bëjnë një gjë të tillë, atëherë është mësimdhënësi i cili ofron informacionin ose i drejton nxënësit ku ta kërkojnë atë. Pasi të sigurohet se materiali është kuptuar nga nxënësit, mësimdhënësi i pyet ata:

1. Sa rrugë ekzistojnë ndërmjet qyteteve të shënuara me shkronjat A dhe B në fig. 2.23?
2. Cila është rruga më e shkurtë për të shkuar nga njëri qytet në tjetrin, nëse lëvizim me të njëjtën shpejtësi?
3. Me çka shprehet gjatësia e segmentit? Si shënohet zakonisht gjatësia e segmentit?
4. Kur dy segmente janë të barabarta? Çdo të thotë të krahasosh segmentet?

Nëse ndonjë nxënës nuk përgjigjet saktë në ndonjërën nga pyetjet, atëherë mësimdhënësi duhet të përmbahet nga dhënia e përgjigjes së saktë. Ai/ajo duhet të kërkojë që nxënësit e tjerë të bëjnë korrigjimin e duhur. Pas dhënies së përgjigjeve të sakta në pyetjet e mësipërme, nxënësit lexojnë pjesën e dytë duke përdorë të njëjtat shenja. Pas leximit dhe sqarimit të paqartësive eventuale, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

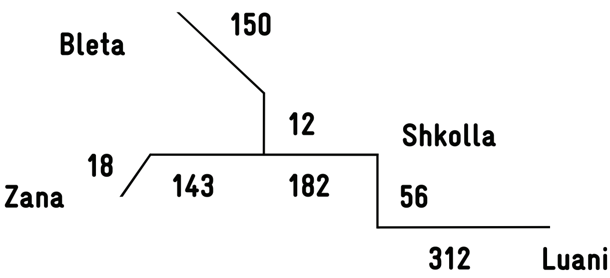
1. Kur thuhet se segmenti AB është më i shkurtër se segmenti EF? Si shënohet ky fakt?
2. Çka paraqet largesa ndërmjet dy pikave?
3. Si gjendet gjatësia e një vije të thyer?

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të gjejnë largësinë ndërmjet qyteteve të ndryshme të Kosovës duke përdorë uebfaqen **http://mapsof.net/distance-calculator/Kosovo.**

Reflektimi – 15 min

Mësimdhënësi paraqet vizatimin e mëposhtëm së bashku me tabelë dhe kërkon që nxënësit të gjejnë:

1. Cili nga nxënësit e ka shkollën më afër?
2. Sa metra më shumë rrugë bëjnë dy nxënësit e tjerë?



NXËNËSI	LARGËSIA NGA SHTËPIA DERI NË SHKOLLË
Bleta	
Luani	
Zana	

Në fund, mësimdhënësi vlerëson arritjen e rezultateve të të nxënit.

Detyrë shtëpie: Nxënësve u kërkohet të zgjidhin detyrën 1 në faqen 36 të librit të matematikës për klasën e VI, si dhe të matin gjatësitë e brinjëve të dyshemesë së një dhome të shtëpisë së tyre që formohet me anën e segmenteve. Ata po ashtu do të gjejnë largësinë ndërmjet vendlindjes së tyre dhe dy qyteteve që ata i pëlqejnë më së shumti duke përdorur uebfaqen **http://mapsof.net/distance-calculator**.

Reflektimi nga përvoja: Aktiviteti në fazën e parë të orës është shumë praktik dhe motivon të gjithë nxënësit për përfshirje në procesin mësimor. Përfundimet e nxjerra në fund të aktivitetit të parë formojnë një bazë të mirë që nxënësit të lexojnë njësinë mësimore dhe të kuptojnë informacionin e paraqitur në të. Përdorimi i 4 shenjave gjatë leximit ndihmon nxënësit të jenë të vëmendshëm rreth informacionit që përvetësojnë. Ata nuk kanë nevojë t'i kushtojnë kujdes informacionit që dinë, por duhet të koncentrohen në mësimin e koncepteve të reja dhe gjithashtu në sqarimin e paqartësive. Pas leximit të pjesës dhe sqarimit të paqartësive eventuale, mësimdhënësi parashtron pyetjet për të kontrolluar shkallën e përfitimit të njohurive nga ana e nxënësve. Me qëllim që të përfshijë të gjithë nxënësit në procesin mësimor, mësimdhënësi duhet të përgatisë pyetje të niveleve të ndryshme. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit me vështirësi në të nxënë të përgjigjen në pyetjet e nivelit të ultë, ndërsa sfidon me pyetje të nivelit të lartë nxënësit e talentuar. Përmes përgjigjeve mësimdhënësi vlerëson aftësinë e nxënësve për të shprehur qartë dhe në mënyrë bindëse idetë e tyre, si dhe identifikon problemet me të cilat mund të ballafaqohen disa nxënës në komunikimin e ideve të tyre.

Meqenëse njësia është e njohur për nxënës, atëherë për shtjellimin e saj mund të përdoret ndonjë nga teknikat e leximit, p.sh. leximi me vendosjen e 4 shenjave. Përmes leximit mund të zhvillohen te nxënësit aftësitë për të lexuar dhe kuptuar në mënyrë të pavarur konceptet matematikore, gjë e cila i ndihmon ata të përgatiten si nxënës që nxënë gjatë gjithë jetës. Detyrat e shtëpisë do të shtojnë kureshtjen e nxënësve, sepse përmes uebfaqes nxënësit mund të njehsojnë largësinë ndërmjet cilatdo dy qyteteve në mbarë botën.

Klasa: VI

Njësia mësimore: Plotpjestueshmëria me 3 dhe me 9

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- identifikojnë numrat e plotpjestueshëm me 3 dhe ata që plotpjesëtohen me 9,
- artikulojnë rregullën për plotpjestueshmërinë e numrave me 3, respektivisht atë të plotpjesëtimit të numrave me 9,
- gjejnë lidhjen në mes të koncepteve të plotpjestueshmërisë, shumëfishit dhe faktorit.

Fjalët kyçe: Plotpjestueshmëria me një numër, faktori, shumëfishi.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 15 min

Mësimdhënësi ndan klasën në 4 grupe dhe shënon 4 detyrat si më poshtë:

$28 \cdot 3 =$ ____, $324 \cdot 3 =$ ____ , $54 \cdot 9 =$ ____, $124 \cdot 9 =$ ____.

Kërkohet që secili grup të njehsojë njërin nga prodhimet, të mbledh shifrat e prodhimit të fituar dhe numrin e tillë ta pjesëtojë me 3 (në dy rastet e para), respektivisht me 9 (në dy rastet e fundit). p.sh.

$$28 \cdot 3 = 84,\ 8+4 = 12 \text{ dhe } 12 \vdots 3\ .$$

Mësimdhënësi pyet nxënësit lidhur me pjesëtimin e numrave:

- Çfarë po ndodh me rastin e pjesëtimit të numrave me 3, respektivisht me 9?

Pas pranimit të përgjigjes, mësimdhënësi kërkon që secili grup të gjejë njërin nga herësit e mëposhtëm. Më pas, nxënësit do të gjejnë shumën e shifrave të pjesëtueshmit dhe do të pjesëtojnë shumën e fituar me numrin 3, respektivisht 9:

$975:3=$ ____ , $11111:3=$ ____ , $873:9=$ ____ , $2112:9=$ ____.

p.sh. $975:3=325,\quad 9+7+5=21,\quad 21 \vdots 3$

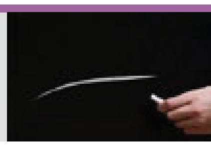
Nga shembujt e paraqitur, mësimdhënësi bashkë me nxënësit formulojnë dy hipoteza:

1. Nëse shuma e shifrave të një numri është numër i plotpjestueshëm me 3, atëherë ai numër plotpjestohet me 3.
2. Nëse shuma e shifrave të një numri është numër i plotpjestueshëm me 9, atëherë ai numër plotpjestohet me 9.

Realizimi i kuptimit - 20 min

Mësimdhënësi vërteton rregullën për plotpjestueshmërinë e një numri me 3. Ai/ajo këshillon nxënësit që ta mbajnë në mend se:

Numri është i plotpjestueshëm me 3, atëherë dhe vetëm atëherë kur shuma e shifrave të tij është numër i plotpjestueshëm me 3.



Në këtë rast, mësimdhënësi tregon se është vërtetuar hipoteza e parë.

Nxënësit udhëzohen të lexojnë pjesën e fundit të njësisë mësimore në tekst lidhur me plotpjestueshmërinë me 9. Pas leximit mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- Cilët numra plotpjestohen me 9?
- Cilët numra nuk plotpjestohen me 9?
- A është vërtetuar hipoteza e dytë lidhur me plotpjestueshmërinë me 9?

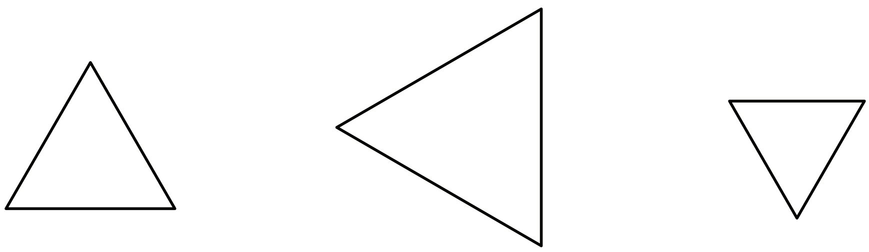
Mësimdhënësi së bashku me nxënësit bën lidhjen e koncepteve të plotpjestueshmërisë, shumëfishit dhe faktorit, p.sh. nëse $x \vdots 3$, atëherë x plotpjesohet me 3, x është shumfish i numrit 3 dhe se 3 është faktor i x.

Reflektimi - 10 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të shënojnë numrat e mëposhtëm dhe me anën e shigjetave të bëjnë lidhjet e duhura:

312		711		630		881	
1111	$\vdots\, 3$	234	$\not\vdots\, 3$	414	$\vdots\, 9$	754	$\not\vdots\, 9$
675		562		125		522	

Derisa nxënësit bëjnë lidhjet, mësimdhënësi vizaton në tabelë tre trekëndësha barabrinjës dhe shënon gjatësinë e perimetrave të tyre: $P_1 = 324cm$, $P_2 = 712cm$, $P_3 = 606cm$.



P_1=324 cm P_2=712 cm P_2=606 cm

Ai/ajo kërkon që nxënësit të zbatojnë rregullën për plotpjestimin e numrave me 3 dhe të gjejnë se cili nga trekëndëshat e dhënë e ka gjatësinë e brinjës numër natyral. Më pas për dy trekëndëshat që plotësojnë kushtin, nxënësit duhet të gjejnë gjatësinë e brinjës së atyre trekëndëshave.

Mbani në mend:

Numri është i plotpjestueshëm me 9, atëherë dhe vetëm atëherë kur shuma e shifrave të tij është numër i plotpjestueshëm me 9.

Në fund, mësimdhënësi kontrollon arritjen e rezultateve të të nxënit dhe këshillon nxënësit:

Detyrë shtëpie: Për të përforcuar njohuritë, kërkohet që nxënësit të zgjidhin detyrat 3 dhe 4 nga libri i matematikës së klasës së VI. Përveç këtyre detyrave, nxënësit e talentuar do të përgjigjen në pyetjet:

- Nëse një numër plotpjestohet me 9, a plotpjestohet edhe me 3? Pse?
- Cilët janë disa nga numrat që plotpjesëtohen me 3 dhe nuk plotpjestohen me 9?

Reflektimi nga përvoja: Kjo njësi mësimore ofron mundësi të përfshirjes së të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Nxënësit që kanë vështirësi për të nxënë mund të përfshihen në kryerjen e shumëzimeve dhe pjesëtimeve të ndryshme, ndërsa nxënësit e talentuar do të vijnë në shprehje me rastin e formulimit të hipotezave dhe vërtetimit të tyre.

Njëra ndër karakteristikat thelbësore të zhvillimit të të menduarit matematikor është formulimi i hipotezave përmes rezonimit induktiv dhe pastaj vërtetimi i tyre në mënyrë shkencore, pra sigurimi i njohurisë përmes rrugës deduktive. Zhvillimi i njësisë mësimore sipas mënyrës së planifikuar ofron pikërisht këtë mundësi. Formulimi i hipotezave në mënyrë induktive përmes zgjidhjes së shembujve të ofruar, si dhe vërtetimi i tyre në mënyrë deduktive është rasti më i shkëlqyer që të fillohet tek nxënësit me ndërtimin e saktë dhe logjik të të menduarit matematikë. Shembujt e zgjedhur dhe aktivitetet e planifikuara ndihmojnë mësimdhënësin që së bashku me nxënësit shumë lehtë të formulojnë hipotezat, t'i vërtetojnë ato në mënyrë sistematike, si dhe të përdorin modelin e vërtetimit në rastet e ngjashme.

Lidhja e koncepteve të plotpjestueshmërisë, faktorit dhe shumëfishit ofron mundësi që nxënësit të kryejnë me sukses detyrat e shtëpisë dhe të arrijnë në mënyrë të pavarur në konstatime logjike gjatë kryerjes së tyre, si p.sh. "Numrat e plotpjestueshëm me 9 janë të plotpjesueshëm me 3, por e anasjellta nuk është e saktë në të gjitha rastet". Nxjerrja e konkluzioneve gjatë zgjidhjes së detyrave është një shtysë e fortë në motivimin e nxënësve për të mësuar dhe studiuar matematikën në të ardhmen.

Klasa: VI

Njësia mësimore: Trapezi

Fjalët kyçe: Trapezi, trapezi barakrahësh, diagonalet e trapezit.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, një tabelë me disa patentë, llastikë me ngjyra të ndryshme, letra A4, gërshërë, këndmatës, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- përkufizojnë trapezin,
- identifikojnë elementet e ndryshme të trapezit, si bazat, këndet, diagonalet dhe lartësinë e trapezit,
- gjejnë shumën e këndeve mbi çdo krah të trapezit.

Zhvillimi i mësimit

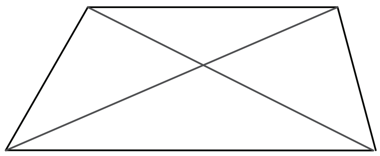
Evokimi – 5 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të ngjisin 4 patentë në tabelë kartoni në atë mënyrë që patentat të paraqesin kulmet e një paralelogrami. Më pas kërkon që nxënësit të vendosin llastikët me një ngjyrë për të formuar brinjët e paralelogramit, ndërsa me ngjyrë tjetër të formojnë diagonalet e tij.

Mësimdhënësi lëviz njërin nga patentat për të bërë një katërkëndësh me një palë brinjë paralele. Ai/ajo pyet nxënësit:

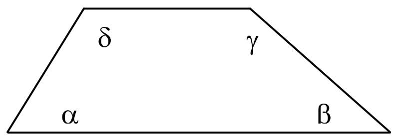
- Si quhet katërkëndëshi me një palë brinjë paralele?

Në këtë mënyrë paraqitet dhe qëllimi i njësisë mësimore: Trapezi.



Realizmi i kuptimit - 20 min

Për të përdorë kohën në mënyrë efektive, mësimdhënësi ka përgatitur nga një fletë për secilin nxënës si më poshtë. Pasi iu shpërndan fletët, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të lexojnë pyetjet dhe detyrat në anën e majtë të letrës së dhënë dhe më pas të lexojnë njësinë mësimore “Trapezi”. Gjatë leximit ata duhet të shënojnë në anën e djathtë përgjigjet dhe zgjidhjet e detyrave të dhëna.

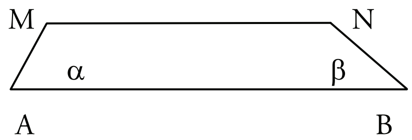
PYETJET DHE DETYRAT	PËRGJIGJET DHE ZGJIDHJET
1. Çka quajmë trapez?	
2. Shënoni elementet e trapezit në figurë.	
3. Çka quajmë trapez barakrahësh?	
4. Si quhet trapezi, te i cili njëri krah i tij përputhet me lartësinë?	
5. Matni këndet mbi krahë të trapezit dhe mblidhni shumat $\alpha+\delta$ dhe $\beta+\gamma$. Sa është shuma?	 Fig.1 $\alpha+\delta=$ $\beta+\gamma=$

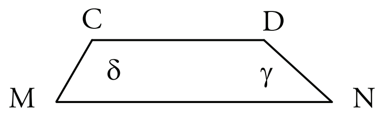
Pas përfundimit të detyrës nga ana e nxënësve, mësimdhënësi bën pyetjet dhe kërkon që nxënësit të përgjigjen. Për pyetjen e 5, ai/ajo kërkon që nxënësit të formulojnë rregullën në lidhje me shumën e këndeve mbi krahët e trapezit. Nga matjet e bëra, nxënësit mund të formulojnë këtë rregull:

- Shuma e këndeve mbi secilin krahë të trapezit është 180°.

Reflektimi – 20 min

Mësimdhënësi ndan klasën në 4 grupe. Ai/ajo kërkon që secili grup të vizatojë një segment paralel me njërën nga bazat në fig. 1 dhe pastaj të presin me gërshërë figurën sipas brinjëve dhe segmentit të vizatuar. Në këtë rast secili grup ka fituar nga dy trapezë.

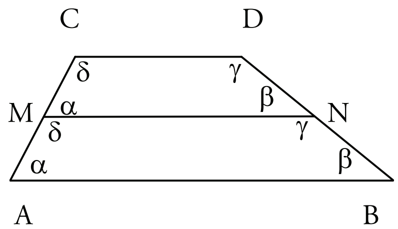




Më pas kërkon që secili grup të vendos njërin trapez mbi tjetrin ashtu që:

Grupi I: Të krahasojë këndin te kulmi A të trapezit të parë me këndin te kulmi M të trapezit të dytë.
Grupi II: Të krahasojë këndin te kulmi M të trapezit të parë me këndin te kulmi C të trapezit të dytë.
Grupi III: Të krahasojë këndin te kulmi B të trapezit të parë me këndin te kulmi N të trapezit të dytë.
Grupi IV: Të krahasojë këndin te kulmi N të trapezit të parë me këndin te kulmi D të trapezit të dytë.

Konstatimet e nxënësve mësimdhënësi i shënon në trapezin e vizatuar në tabelë.



Meqë te kulmi M kemi $\alpha+\delta=180°$, atëherë edhe shuma e këndeve te kulmi A dhe C është 180°. Ngjashëm shuma e këndeve te kulmi B dhe D është 180°. Në këtë mënyrë është vërtetuar në mënyrë vizuale se shuma e këndeve mbi krahët e trapezit është 180°. Në fund mësimdhënësi shqyrton shkallën e arritjes së rezultateve të të nxënit dhe i këshillon nxënësit:

Mbani në mend:

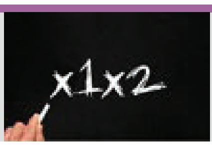
Shuma e këndeve mbi secilin krah të trapezit është 180°.

Detyrë shtëpie: Për të përforcuar njohuritë rreth trapezit barakrahësh, kërkohet që nxënësit të vizatojnë një trapez barakrahësh dhe të zgjidhin detyrat:
Detyra 1. Matni këndet mbi bazën e trapezit barakrahësh. Çfarë mund të konstatohet? Njehsoni madhësitë e të gjitha këndeve të trapezit barakrahësh nëse dihet që njëri kënd mbi bazë është 73°.

Detyra 2. Në trapezin barakrahësh vizatoni diagonalet e tij dhe matni gjatësitë e tyre. Çfarë mund të konstatohet?

Reflektimi nga përvoja: Aktivitetet e përzgjedhura janë shumë praktike. Nxënësit që kanë vështirësi në të nxënë kanë mundësi të japin përgjigjet të cilat mund t'i gjejnë të gatshme në tekst, të bëjnë matjet e këndeve, prerjen e trapezit, etj., ndërsa nxënësit e talentuar mund të sfidohen gjatë formulimit të rregullës për shumën e këndeve mbi krahët e trapezit.

Njësia mësimore është shumë e ngarkuar me informacione që duhet mbajtur në mend. Është më mirë nëse mësimdhënësi fokusohet të paraqes ngadalë dhe qartë informacionet për trapezat dhe llojet e tyre, si dhe të aftësojë nxënësit për të nxjerrë vetë pohimin për shumën e këndeve mbi krahët e trapezit dhe vërtetimin vizual të tij, meqë vërtetimi analitik nuk mund të bëhet në këtë fazë. Ndërsa, vetitë e trapezit barakrahësh mund të identifikohen lehtë nga nxënësit përmes detyrave të shtëpisë. Një planifikim i tillë bën që të gjithë nxënësit të përfitojnë njohuritë në mënyrë të qëndrueshme, duke bërë vetë matjet e nevojshme dhe duke nxjerrë përfundimet.



Klasa: VI

Njësia mësimore: Syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe

Fjalët kyçe: Syprinë, sipërfaqe drejtkëndëshe.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, vizorja, një metër.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- njehsojnë syprinën e sipërfaqes drejtkëndëshe,
- zbatojnë formulën për gjetjen e syprinës së sipërfaqes drejtkëndëshe në detyra nga jeta e përditshme.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 5 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

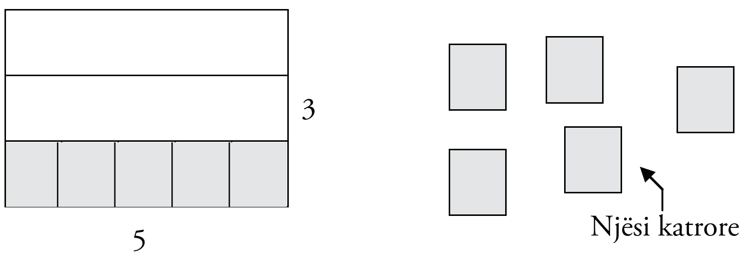
- Cilat objekte në klasë kanë formën e drejtkëndëshit?
- Çka quajmë drejtkëndësh? Çka quajmë sipërfaqe drejtkëndëshe?
- Çka do të thotë të matësh një sipërfaqe? Çka paraqet syprina e një sipërfaqeje?

Pas përgjigjeve, mësimdhënësi paraqet qëllimin e njësisë mësimore: Njehsimi i syprinës së sipërfaqes drejtkëndëshe.

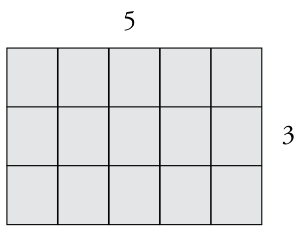
Realizimi i kuptimit - 20 min

Kërkohet që nxënësit në fletoret me katrorë të vizatojnë një drejtkëndësh me brinjët: gjatësia 5 katrorë dhe gjerësia 3 katrorë, si dhe të ngjyrosin disa katrorë të fletores jashtë drejtkëndëshit. Më pas, mësimdhënësi pyet nxënësit:

- Meqë secili katror paraqet një njësi katrore, atëherë sa njësi katrore (petëza katrore) mund të vendosim në rreshtin e parë të drejtkëndëshit?



- Sa njësi katrore nevojiten për të plotësuar rreshtin e dytë? Çfarë mund të thuhet për rreshtin e tretë?



Në këtë mënyrë nxënësit arrijnë në përfundimin se për të mbuluar drejtkëndëshin nevojiten $5+5+5 = 5\cdot 3 = 15$ njësi katrore.

Mësimdhënësi vazhdon me pyetjet:

- Si mund të gjendet formula për njehsimin e syprinës së sipërfaqes drejtkëndëshe?

- Nëse me *a* dhe *b* shënojmë gjatësitë e brinjëve të drejtkëndëshit, atëherë cila është formula për njehsimin e syprinës së sipërfaqës së tij?
- Si mund të gjejmë formulën për njehsimin e syprinës së sipërfaqes katrore?

Një nxënës do të shënojë formulat për njehsimin e syprinës së sipërfaqes së drejtkëndëshit dhe asaj të katrorit:

$$S = a \cdot b \text{ dhe } S = a^2.$$

Mësimdhënësi ndan klasën në 4 grupe. Nxënësit e 3 grupeve të para do të punojnë në mënyrë idnividuale, ndërsa nxënësit e grupit të IV do të punojnë së bashku.

Detyrat sipas grupeve janë:
Grupi I: Të njehsojnë syprinën e sipërfaqes së një flete të librit.
Grupi II: Të njehsojnë syprinën e sipërfaqes së një flete të fletores.
Grupi III: Të njehsojnë syprinën e sipërfaqes së bankës.
Grupi IV: Të njehsojnë syprinën e sipërfaqes së dyshemesë së klasës.

Rezultatet e fituara shënohen në tabelë. Më pas, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të njehsojnë:

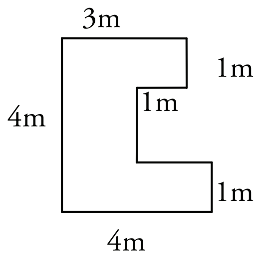
- Sa do të kushtojë mbulimi me shtrojë i dyshemesë së klasës, nëse dihet se $1m^2$ e shtrojës kushton 14,2 Euro?

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të njehsojnë syprinën e sipërfaqeve drejtkëndëshe me gjatësi të ndryshme të brinjëve duke përdorur kalkulatorin nga uebfaqja **http://www.calculatorsoup.com/calculators/geometry-plane/rectangle.php**

Reflektimi – 20 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit e tri grupeve të gjejnë syprinën e sipërfaqes drejtkëndëshe, nëse dihet se perimetri i tij është 18 *cm*. Ndërsa grupi i katërt do të gjejë syprinën e sipërfaqes së dhënë në figurë në dy mënyra.
Një përfaqësues i secilit nga tri grupet e para do të paraqes zgjidhjen e detyrës në tabelë. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të krahasojnë rezultatet dhe të përgjigjen në pyetjet:

- A ekzistojnë drejkëndësha me perimetër të njëjtë, por me syprina të ndryshme të sipërfaqes?



Një nxënës i grupit të katërt do të paraqes zgjidhjen e detyrës së tyre dhe do të përgjigjet në pyetjen:
- Si mund të njehsohet syprina e sipërfaqes së një figure të ndërtuar nga drejtkëndëshat?

Në fund, mësimdhënësi vlerëson arritjen e rezultateve të të nxënit dhe i këshillon nxënësit:

Mbani në mend:

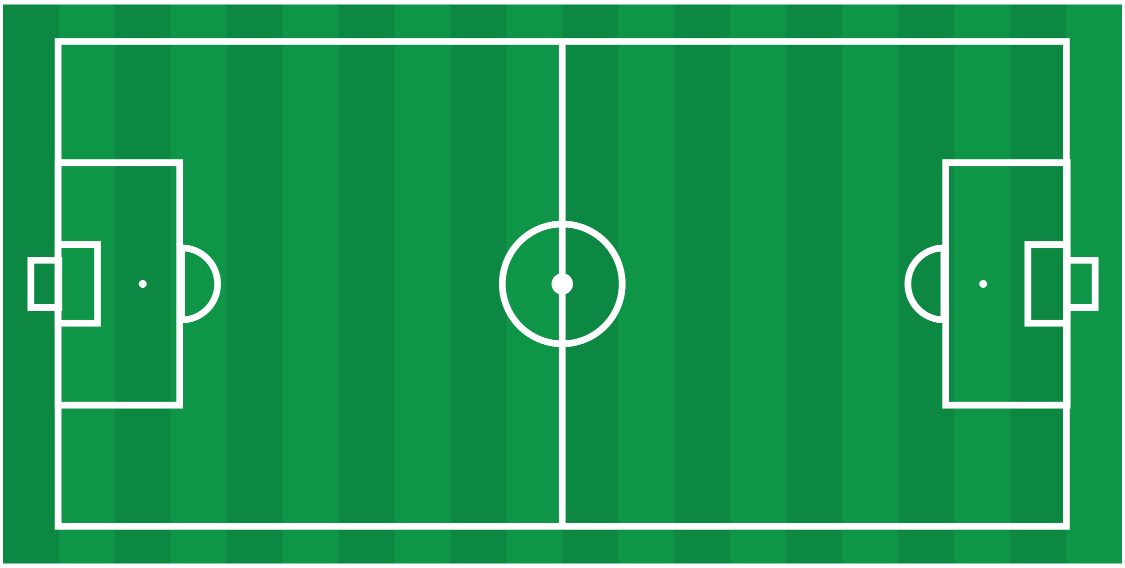
Syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe është e barabartë me prodhimin e gjatësive të brinjëve të saj.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrën 3 në faqen 166 të librit të matematikës së klasës së VI, si dhe detyrat:

Detyrë 1: Gjeni syprinën e sipërfaqes së një dhome të shtëpisë, nëse ajo është drejtkëndësh ose mund të ndahet në disa drejtkëndësha.

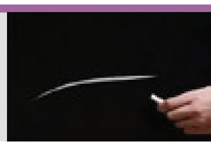
Detyrë 2: Duke hulumtuar në internet, gjeni syprinën e sipërfaqes të stadiumit më të madh të futbollit në botë.

Reflektimi nga përvoja: Gjetja e formulës për njehsimin e syprinës së sipërfaqes drejtkëndëshe është bërë përmes demonstrimit të një rasti konkret në mënyrë që nxënësit të vijnë vetë deri te formula. Mënyra e paraqitur në këtë rast parapërgatitë nxënësit për gjetjen e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave gjeometrikë në të ardhmen, sepse i njëjti model do të përdoret për njehsimin e syprinës së sipërfaqes së trupave gjeometrikë, ndërsa për të njehsuar vëllimin e trupave gjeometrikë nevojitet përgjithësimi nga njësia katrore (petëzave) në njësi kubike (kubi njësi).



Në jetën praktike ka jashtëzakonisht shumë shembuj në të cilët përdoret formula për njehsimin e syprinës së sipërfaqes drejtkëndëshe, prandaj mësimdhënësi duhet t'i kushtojë kujdes që të gjithë nxënësit të mësojnë të gjejnë syprinën e sipërfaqes drejtkëndëshe dhe të figurave që ndërtohen nga drejtkëndëshat. Ndërsa nga nxënësit e talentuar duhet kërkuar që të njehsojnë në mënyra të ndryshme syprinën e sipërfaqeve të figurave të ndërtuara nga drejkëndëshat, si dhe të njehsojnë syprina të sipërfaqeve të drejkëndëshave të ndryshëm të cilët kanë të njëjtin perimetër. Fakti se ekzistojnë drejtkëndësha me syprinë të ndryshme të sipërfaqes, por me të njëjtin perimetër nxit kërshërinë e nxënësve dhe gatishmërinë e tyre për të zgjidhur detyra të tilla.

Mësimdhënësi duhet të zgjedhë detyra kreative nga jeta praktike për t'ju dhënë nxënësve për t'i zgjidhur në shtëpi. Detyrat e tilla i motivojnë nxënësit për t'i zgjidhur ato me kënaqësi dhe ndikojnë që nxënësit të kenë qasje miqësore ndaj lëndës së matematikës.



Klasa: VII

Njësia mësimore: Mbledhja e numrave me shenja të kundërta

Fjalët kyçe: Numrat me shenjë, mbledhja e numrave me shenjë.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, zarfe, një termometër, disa zare, figura plastike, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

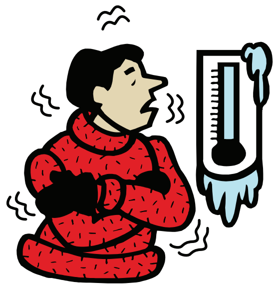
- njehsojnë shumat kur mbledhësit janë numra me shenja të kundërta,
- zgjidhin detyra nga jeta praktike.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi organizon klasën në grupe me nga 4 nxënës. Secili grup pranon nga një zarf në të cilën gjinden 4 detyra. Secili anëtar i grupit do të zgjidhë njërën nga detyrat e mëposhtme që gjinden në zarf:

Detyra 1. Arti ka 5 euro. Ai dëshiron të blejë një libër 7 euro në dyqanin përballë shtëpisë. Arti e lut shitësin për t'ia dhënë librin, sepse të hollat e tjera do t'ia sjellë sapo të kthehet babai nga puna. Shitësi ia ofron Artit librin. Sa Euro i ka borxh Arti shitësit?



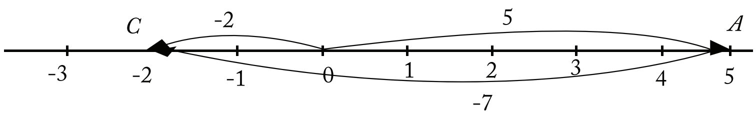
Detyra 2. Drita ia ka borxh Lindës 4 Euro. Nëna e Dritës ia ka dhënë asaj 5 euro. Sa të holla do t'i mbeten Dritës pasi t'ia kthen borxhin Lindës?

Detyra 3. Temperatura në mëngjes në një qytet në stinën e dimrit është -4°C. Sa do të jetë temperatura në mesditë, nëse dihet se temperatura do të rritet për 5°C?

Detyra 4. Temperatura në mesditë në një qytet në stinën e dimrit është 3°C. Sa do të jetë temperatura në mbrëmje, nëse dihet se temperatura do të zbret për 6°C?

Realizimi i kuptimit - 20 min

Njëri nga nxënësit që ka zgjidhë detyrën 1 do të paraqes zgjidhjen e detyrës në tabelë. Ky është një moment i përshtatshëm që mësimdhënësi të interpretojë zgjidhjen e detyrës përmes zhvendosjes së pikave në një bosht numerik. Mësimdhënësi duhet të ketë kujdes që nxënësit të kuptojnë se lëvizja në bosht bëhet djathtas origjintës O për numrat pozitivë (të hollat që ka Arti), ndërsa majtas për numrat negativë (të hollat që duhet të paguajë për blerjen e librit). Pra,



$(+5) + (-7) = (-2)$.

Një nga nxënësit që ka zgjidhur detyrën 2 do të paraqes zgjidhjen në tabelë. Ai/ajo duhet ta sqarojë zgjidhjen e detyrës përmes interpretimit në boshtin numerik:

$$(-4)+(+5)=(+1).$$

E njëjta procedurë vazhdon për zgjidhjen e detyrës së 3. Nxënësi e paraqet detyrën duke u shërbyer me termometër. Ai/ajo tregon zgjidhjen duke njehsuar vetëm vlerat numerike të temperaturës, pra

$$(-4)+(+5)=(+1).$$

Mësimdhënësi mund të shfrytëzojë këtë shembull për të treguar se llogaritja e shumës së numrave me shenjë mund të bëhet edhe në boshtin vertikal. Meqë temperaturat në termometër shënohen në mënyrë vertikale, atëherë mbledhja në boshtin vertikal mund të bëhet njëjtë sikur në boshtin horizontal. E njëjta procedurë përdoret për të paraqitur zgjidhjen e detyrës 4.

Mësimdhënësi shfrytëzon shembujt e mësipërm për të sqaruar rregullën për mbledhjen e numrave me shenjë, duke shfrytëzuar nocionin e vlerës absolute të numrave. Ai/ajo vë në pah se mbledhja e numrave me shenjë ka zbatim të madh në zgjidhjen e detyrave nga jeta praktike, si p.sh. pagesa e kredive, pasqyrat financiare të organizatave të ndryshme, llogaritja e temperaturave, etj.

Reflektimi – 15 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të luajnë në dyshe. Secili çift i nxënësve do të ketë një fletë të njëjtë, një zar me numrat 1-6 dhe dy figura plastike.
Rregulla e lojës: Dy nxënësit do të vendosin figurat plastike në pikën e fillimit, te numri 0. Pastaj secili nga ata do të hedh një herë zarin. Nxënësi që ka numrin më të madh gjatë hedhjes së zarit, fiton të drejtën të fillojë lojën i pari.

Fundi

Fillimi

0	1	-2	6	-9	0	-1
-4						5
13						-4
1						2
-2						12
5	-7	12	-18	-1	3	-6

Nxënësi që ka fituar të drejtën të fillojë lojën i pari p.sh. Jeta, hedh zarin. Numri që fitohet gjatë hedhjes së zarit tregon se sa katrorë do të kapërcejë Jeta me figurën plastike, p.sh. nëse numri i fituar gjatë hedhjes së zarit është 4, atëherë ajo duhet të kapërcejë me figurën plastike katër katrorë dhe të pozicionojë figurën në numrin -2. Në këtë rast Jeta duhet të mbledhë numrin 0 me numrin -2. Rezultati i saj në këtë moment është:

$$0+(-2)=-2.$$

Më pas, zarin e hedh lojtari tjetër, në këtë rast Dielli. Nëse gjatë hedhjes fitohet numri 3, atëherë Dielli e lëvizë figurën platike për tre katrorë dhe e pozicion atë te numri 1. Dielli bën mbledhjen e numrave 0 dhe 1. Rezultati i Diellit në këtë rast është:

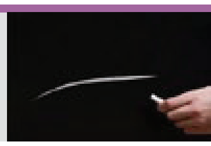
$$0+1=1.$$

Jeta	Dielli
-2	

Loja vazhdon me hedhjen e zarit nga lojtari i parë. Nëse gjatë hedhjes së zarit Jeta fiton numrin 5, atëherë ajo lëvizë figurën plastike për pesë katrorë duke e pozicionuar atë te katrori me numër -1. Ajo kryen mbledhjen e rezultatit që ka me numrin e katrorit ku gjendet figura plastike, pra:

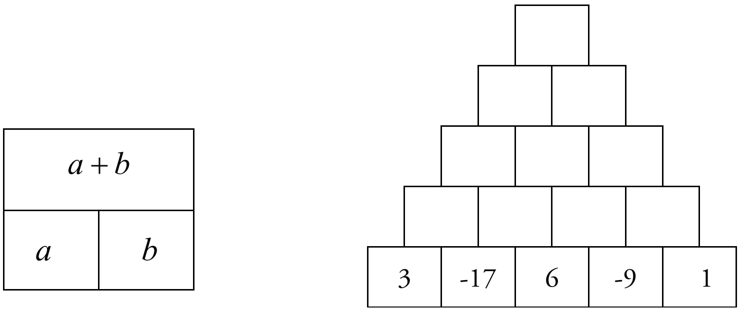
$$(-2)+(-1)=-3.$$

Loja vazhdohet nga Dielli në të njëjtë mënyrë. Loja përfundon kur lojtari i parë arrin në fund, pra te katrori i fundit me numër 1. Nëse lojtari mbërrin te katrori me numër -2, atëherë ai/ajo



duhet të presë numrin 1 në hedhjen e zarit për të mbërritur në fund. Deri atëherë, lojtari që pret nuk shton pikë, ndërsa lojtari tjetër vazhdon me mbledhjen e numrave si është përshkruar më sipër. Lojtari i parë që mbërrin në katrorin e fundit me numër 1 bën mbledhjen e rezultatit të fundit me numrin 1. Kjo shënon dhe përfundimin e lojës. Fitues është lojtari që ka rezultatin më të mirë në fund të lojës.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të plotësojnë tabelën duke respektuar rregullën e dhënë.



Nxënësit e talentuar do të zgjidhin detyrën: Cili çift i numrave i formuar nga numrat: 7, -2, 1, -4, 3, jep shumën më të madhe?

Reflektimi nga përvoja: Mbledhja e numrave me shenjë të kundërt është një veprim shumë i rëndësishëm në matematikë. Kuptimi i këtij veprimi ndihmon nxënësit që në të ardhmen lehtësisht të kuptojnë veprimin e zbritjes në bashkësinë e numrave të plotë, si dhe veprimet e mbledhjes dhe zbritjes në bashkësitë e tjera numerike. Për këtë arsye, mësimdhënësi duhet t'i kushtojë kujdes që nxënësit ta kuptojnë këtë veprim në mënyrë logjike duke dhënë interpretimin përmes boshtit numerik dhe zgjidhjes së shembujve nga jeta praktike. Zgjidhja e shembujve nga jeta praktike e bënë njësinë mësimore më interesante, i ndihmon nxënësit të kuptojnë më lehtë veprimin, si dhe e përçon tek nxënësit mesazhin se është me rëndësi të nxënit e koncepteve dhe rregullave të matematikës, sepse ato na nevojiten për t'i zbatuar në jetë.

Aktivitetet e planifikuara motivojnë secilin nxënës të përfshihet aktivisht në procesin mësimor. Nxënësit mësojnë më së miri nëse e praktikojnë të nxënit përmes lojës që sjellë kënaqësi. Kjo njësi mësimore ofron një mundësi të tillë dhe mësimdhënësit duhet ta shfrytëzojnë atë. Duke pasur parasysh se njësia mësimore është shumë e rëndësishme, mësimdhënësi duhet të përpiqet të jetë kreativ për të motivuar nxënësit që të kuptojnë procesin në mënyrën më efikase.

Përmes aktiviteteve të planifikuara, te nxënësi zhvillohen aftësitë e llogaritjes, të krahasimit të vlerave, të analizës së rezultateve të fituara, si dhe të zbatimit të rregullave matematikore në zgjidhjen e problemeve nga jeta praktike. Të gjitha këto ndihmojnë që te nxënësit të zhvillohen kompetenca të ndryshme, siç janë: kompetencat e nxënit, të menduarit, si dhe ajo e jetës dhe e punës.

Klasa: VII

Njësia mësimore: Shuma e këndeve të trekëndëshit

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

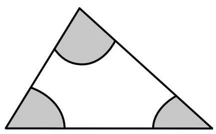
- argumentojnë se shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshit është 180°,
- gjejnë shumën e këndeve të jashtme të trekëndëshit,
- zbatojnë rregullat në zgjidhjen e detyrave të ndryshme.

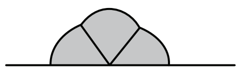
Fjalët kyçe: Kënd i brendshëm, kënd i jashtëm.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, vizorja, gërshërët, këndmatësi, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 10 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në mënyrë individuale të kryejnë këtë aktivitet:





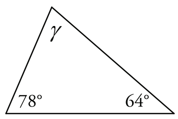
- Të vizatojnë në një letër një trekëndësh të çfarëdoshëm.
- Të presin me dorë tri këndet e trekëndëshit.
- Të rendisin në një vijë të drejtë tri këndet e prera.
- Të analizojnë rezultatin e fituar.

Realizimi i kuptimit – 20 min

Përmes shembullit, nxënësit arrijnë në përfundimin se shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshit është 180°, pra

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

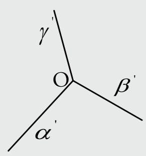
Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të gjejnë masën e këndit γ nga figura me anën e matjes me këndmatës, si dhe duke zbatuar formulën e mësipërme.

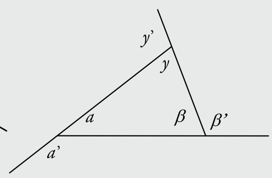


Një nxënës do ta shënojë zgjidhjen e detyrës në tabelë, ndërsa të tjerët do të krahasojnë rezultatet e tyre dhe do të bëjnë korigjimet në rast nevoje.
Për të zhvilluar shkathtësitë e nxënësve, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të kryejnë kuizin në uebfaqen: **http://www.mathopenref.com/triangleinternalangles.html.**

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të kryejnë këtë aktivitet:

- Të vizatojnë një trekëndësh të çfarëdoshëm.
- Të vazhdojnë brinjët e trekëndëshit.
- Të shënojnë këndet e brendshme me α, β, γ, ndërsa këndet e jashtme korresponduese me α', β', γ'.
- Të presin me gërshërë këndet e jashtme.
- Me qendër në pikën O të rendisin këndet e jashtme njërin pas tjetrit.
- Të analizojnë çfarë fituan.



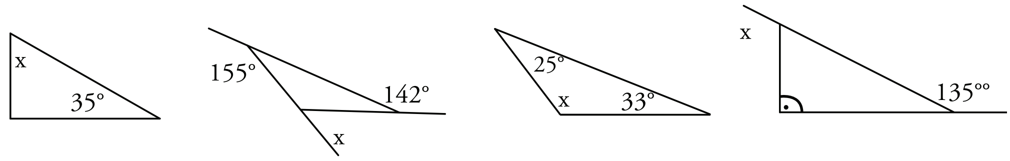


Pas vërtetimit në mënyrë vizuale, mësimdhënësi vërteton në mënyrë analitike se shuma e këndeve të jashtme të trekëndëshit është e barabartë me 360°.

Reflektimi – 15 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në dyshe të gjejnë masën e këndit x nga njëra nga figurat.

Grupi I Grupi II Grupi III Grupi IV



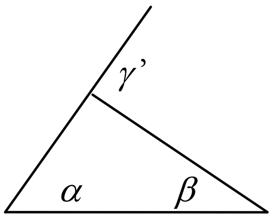
Pas përfudnimit të punës, katër përfaqësues të grupeve do të paraqesin zgjidhjet në tabelë. Për detyrat II-IV, mësimdhënësi do të motivojë nxënësit të diskutojnë mënyrat e ndryshme të gjetjes së masës së këndit x. Përfundimisht, mësimdhënësi kërkon që nxënësit në dyshe të identifikojnë profesionet në të cilat nevojitet gjetja e masës së këndeve, si p.sh. në ndërtimtari, arkitekturë, artileri, etj. Në fund, mësimdhënësi kontrollon shkallën e arritjes së rezultateve të të nxënit dhe i këshillon nxënësit:

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zhvillojnë këtë aktivitet:

- Të vizatojnë në një letër një trekëndësh të çfarëdoshëm.
- Të zgjatin një brinjë të trekëndëshit për të formuar këndin e jashtëm γ'.
- Të presin dy këndet e brendshme të trekëndëshit, α dhe β , të cilat janë jo fqinjë me këndin e jashtëm γ'.
- Të rendisin dy këndet e brendshme α dhe β tek këndi i jashtëm γ'.
- Të krahasojnë shumën $\alpha + \beta$ me këndin e jashtëm γ'.
- Të konstatojnë çfarë fituan.

Mbani në mend:

- Shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshit është 180°.
- Shuma e këndeve të jashtme të trekëndëshit është 360°.



Reflektimi nga përvoja: Mësimdhënësi duhet t'i kushtojë kujdes motivimit të gjithë nxënësve për të realizuar aktivitetet e planifikuara, sepse realizimi praktik i tyre u ndihmon nxënësve të arrijnë vetë deri te formulimi i rregullave dhe tek mbajtja në mend e tyre për një kohë më të gjatë. Aktivitetet praktike për vërtetimin vizual të rregullës për shumën e këndeve të brendshme të trekëndëshit është thelbësore në këtë fazë pasi që kjo është mënyra e vetme për ta vërtetuar atë.

Meqenëse ka shumë informacione të rëndësishme brenda njësisë mësimore, të cilat kanë zbatim më vonë, atëherë është planifikuar që rregulla e këndit të jashtëm të trekëndëshit të mos bëhet brenda orës, por të realizohet si aktivitet në kuadër të detyrës së shtëpisë. Kjo ofron mundësi që nxënësit të mos nguten në përfitimin e njohurive të duhura. Vërtetimi vizual i rregullës për këndin e jashtëm të trekëndëshit përmes aktivitetit praktik të dhënë si detyrë shtëpie ndihmon të kuptuarit dhe mbajtjen në mend të informacionit, si dhe i përgatitë nxënësit për vërtetimin analitik të saj, gjë e cila mund të bëhet gjatë orës vijuese të ushtrimeve.

Aktivitetet e planifikuara mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Nxënësit e talentuar mund të sfidohen në formulimin e rregullave dhe zbatimin e tyre në zgjidhjen e detyrave, ndërsa ata që kanë vështirësi në të nxënë mund të zhvillojnë aktivitetet praktike dhe të paktën t'i mbajnë në mend rregullat nga vërtetimi vizual i tyre. Kuizi ofron mundësinë që të gjithë nxënësit të shqyrtojnë korrektësinë në njehsimin e masës së këndit të tretë të trekëndëshit duke ditur masën e dy këndeve të tjera. Nxënësit mund të vazhdojnë kuizin edhe në shtëpi dhe në këtë mënyrë të përmirësojnë shkathtësitë e tyre në llogaritje.
Realizimi i aktiviteteve të planifikuara zhvillon te nxënësit aftësitë e llogaritjes, të vërtetimit në mënyrë vizuale dhe analitike të disa rregullave të rëndësishme në matematikë, si dhe të zbatimit të këtyre rregullave në detyra të ndryshme.

Klasa: VII

Njësia mësimore: Perimetri i sipërfaqeve shumëkëndëshe

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- njehsojnë perimetrin e sipërfaqeve shumëkëndëshe.
- artikulojnë rregullën për njehsimin e perimetrit të sipërfaqes shumëkëndëshe, si dhe të atyre që janë sipërfaqe shumëkëndëshe të rregullta.
- zbatojnë formulat për njehsimin e perimetrit të sipërfaqeve shumëkëndëshe në zgjidhjen e detyrave nga jeta praktike.

Fjalët kyçe: Sipërfaqe shumëkëndëshe, perimetër.
Materialet dhe burimet: Libri, tabela, fletoret e nxënësve, metri, një vizatim.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min

Kërkohet që nxënësit në dyshe të njehsojnë perimetrin e sipërfaqes së bankës. Pas llogaritjes, një dyshe e nxënësve do të shënojë zgjidhjen e detyrës në tabelë. Shembulli ndihmon nxënësit të rikujtojnë formulën për njehsimin e perimetrit të sipërfaqes drejtkëndëshe:

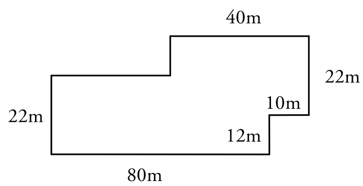
$$P = a + b + a + b = 2(a + b).$$

Për të rikujtuar formulën për njehsimin e perimetrit të sipërfaqes katrore, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- Si quhet katërkëndëshi i rregullt?
- Si fitohet formula për njehsimin e perimetrit të sipërfaqes katrore?

Më pas, mësimdhënësi paraqet vizatimin në tabelë dhe tregon se një shkollë kërkon të dijë sa do t'i kushtojë rrethimi i oborrit, i cili ka formën si në figurën e dhënë, duke ditur se 1m rrethojë kushton 12 Euro.
Ai/ajo pyet nxënësit:

- Si mund t'i ndihmojmë kësaj shkolle?

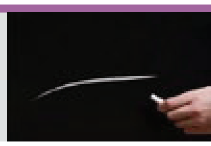


Realizimi i kuptimit – 20 min.

Kërkohet që nxënësit në dyshe të gjejnë perimetrin e figurës së dhënë dhe çmimin që duhet të paguajë shkolla për rrethojën. Një dyshe do të shënojë zgjidhjen e detyrës në tabelë. Nga ky shembull, nxënësit arrijnë të formulojnë rregullën për njehsimin e perimetrit të sipërfaqes shumëkëndëshe:

Perimetër të sipërfaqes shumëkëndëshe quajmë shumën e gjatësive të brinjëve të saj.

Për të demonstruar rregullën e mësipërme, mësimdhënësi shfrytëzon uebfaqen **http://www.mathopenref.com//polygonperimeter.html.**



Më pas, mësimdhënësi pyet nxënësit:

- Çka quajmë shumëkëndësh të rregullt?

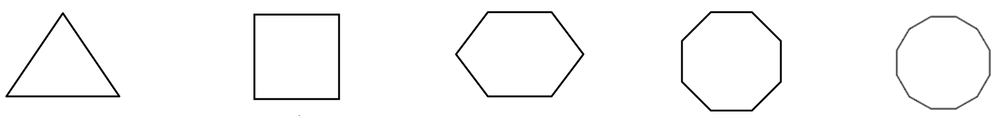
Pas dhënies së përgjigjes së saktë, ai/ajo kërkon që nxënësit në dyshe të gjejnë formulën për njehsimin e perimetrit të sipërfaqes trekëndëshe barabrinjëse, të sipërfaqes pesëkëndëshe të rregullt, si dhe të sipërfaqes së rregullt n-këndëshe. Një dyshe e nxënësve do të shënojë formulat e gjetura në tabelë.

Për të aftësuar nxënësit në zbatimin e formulave të gjetura, mësimdhënësi kërkon që nxënësit në dyshe të plotësojnë tabelën e mëposhtme për shumëkëndëshat e rregullt:

NUMRI I BRINJËVE	EMRI I SIPËRFAQES SHUMËKËNDËSHE	GJATËSIA E BRINJËS	PERIMETRI
3		2 cm	
4			6cm
5		12 mm	
6			19.2 cm
10		1,6 cm	

Reflektimi – 15 min

Kërkohet që nxënësit të gjejnë se cilat sipërfaqe shumëkëndëshe të rregullta me gjatësinë e brinjës numër natyral mund të kenë perimetrin 24 cm. Zgjidhjet e detyrave do të shënohen në tabelë.



8 6 4 3 2

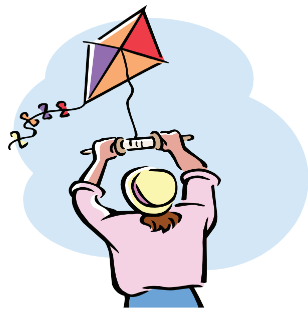
Më pas nxënësit në dyshe do të vizatojnë të paktën 2 sipërfaqe të ndryshme shumëkëndëshe që kanë perimetrin e barabartë me 16 cm. Disa modele të shumëkëndëshave që kanë gjetur nxënësit do të vizatohen në tabelë. Nga ky shembull arrihet në përfundimin se ekzistojnë shumëkëndësha të ndryshëm, të cilët mund të kenë perimetër të njëjtë të sipërfaqeve të tyre.

Në fund mësimdhënësi kërkon që nxënësit të gjejnë shembuj nga jeta praktike në të cilët ka zbatim rregulla për njehsimin e perimetrit të sipërfaqeve shumëkëndëshe. Gjetja e shembujve të tillë kompleton arritjen e rezultateve të të nxënit brenda orës mësimore.

Detyrë shtëpie: Mësimdhënësi u sqaron nxënësve se çfarë figure është deltoidi dhe kërkon që nxënësit të zgjidhin këto detyra:

Detyra 1. Duke kërkuar në internet, njehsoni perimetrin e sipërfaqes së bazës së piramidës më të madhe në Egjipt.

Detyra 2. Njehsoni gjatësitë e brinjëve të një xhite në formë deltoidi, e cila duhet të ndërtohet me 4 m tel, duke ditur se gjatësia e njërës brinjë është për 0,5 m më e gjatë se e brinjës tjetër.

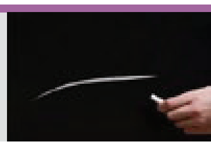


Detyra 3. Gjeni perimetrin e sipërfaqes shumëkëndëshe të pjesës frontale të shtëpisë suaj ose të dyshemesë së një dhome që është në formën e shumëkëndëshit.

Reflektimi nga përvoja: Meqenëse nxënësit nga klasat e mëhershme kanë njohuri për gjetjen e perimetrit të sipërfaqes drejtkëndëshe, atëherë rikujtimi i formulës përmes një shembulli praktik motivon nxënësit për t'u përfshirë aktivisht në procesin mësimor. Më pas, paraqitja e një shembulli nga jeta për llogaritjen e çmimit të rrethojës, nxit të gjithë nxënësit për të gjetur zgjidhjen e kërkuar, sepse është diçka me të cilën ata ballafaqohen në jetën e përditshme.

Perimetri është një koncept i njohur për nxënësit, prandaj mësimdhënësit duhet të shfrytëzojnë këtë fakt dhe të fokusohen më shumë në zhvillimin e aftësive të nxënësve për të njehsuar perimetrin e sipërfaqeve shumëkëndëshe të rregullta përmes gjeneralizimit të rasteve. Kjo qasje ndihmon nxënësit të përforcojnë njohuritë e tyre dhe të zhvillojnë shkathtësi për të modifikuar formulat e caktuara me qëllim të përdorimit të tyre në zgjidhjen e detyrave të ndryshme.

Perimetri i sipërfaqeve shumëkëndëshe është një koncept që zbatohet jashtëzakonisht shumë në jetën praktike. Një gjë e tillë duhet shfrytëzuar nga mësimdhënësi për të përcjellë tek nxënësit mesazhin se njohuritë dhe shkathtësitë që fitohen në matematikë kanë zbatim në jetë. Mësimdhënësi duhet të jetë kreativ në zgjedhjen e shembujve, sidomos të atyre që janë në përputhje me interesimet e nxënësve, si për shembull kurioziteti i nxënësve për lojën e futbollit, basketbollit, për projektimin e shtëpive, etj. Sa më shumë respektojmë preferencat e nxënësve aq më i madh është interesimi i nxënësve për të nxënës dhe rezultatet e tyre. Motivimi i brendshëm i iniciuar nga interesimi personal zgjon kërshërinë e nxënësve për të nxënë dhe në këtë mënyrë rrit shkallën e përvetësimit të njohurive nga ana e tyre.



Klasa: VII

Njësia mësimore: Zbatimi i teoremës së Pitagorës – ushtrime

Fjalët kyçe: Katete, Hipotenuzë, teoremë e Pitagorës.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, detyrat e përgatitura nga mësimdhënësi, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- zbatojnë teoremën e Pitagorës në zgjidhjen e detyrave të ndryshme nga jeta praktike.

Zhvillimi i mësimit

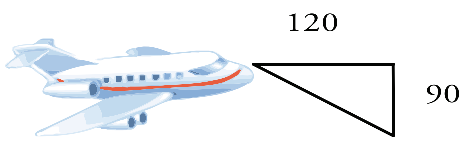
Evokimi – 5 min

Mësimdhënësi kërkon që 2-3 nxënës të artikulojnë teoremën e Pitagorës të mësuar në orën e kaluar dhe të tregojnë informacionet që kanë arritur t'i sigurojnë nga interneti për Pitagorën dhe teoremën e famshme të tij (pjesë e detyrave të shtëpisë nga ora e kaluar). Disa nga informatat e rëndësishme mësimdhënësi i shënon në tabelë.

Realizimi i kuptimit – 30 min

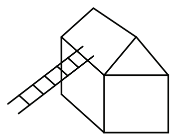
Mësimdhënësi ka përgatitur fletat me nga 4 detyra për secilin grup. Ai/ajo kërkon që nxënësit në grupe të lexojnë detyrën e parë, ta ilustrojnë atë me vizatim dhe ta zgjidhin. Grupi lajmëron që ka përfunduar detyrën pasi të sigurohet që secili anëtarë i grupit të tyre e ka kuptuar zgjidhjen.

Detyra 1. Aeroplani pasi ngrihet nga pista bën 120 km rrugë nga lindja dhe pastaj kthehet dhe bën 90 km nga jugu. Sa është larg aeroplani nga pista?



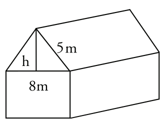
Pasi të gjitha grupet kanë zgjidhur detyrën, mësimdhënësi cakton grupin që është lajmëruar i pari për ta paraqitur zgjidhjen e detyrës në tabelë. Grupet e tjera do të vlerësojnë prezantimin e grupit me një notë nga 1-5.
E njëjta procedurë do të përsëritet gjatë zgjidhjes së secilës detyrë vijuese.

Detyra 2. Muri i një shtëpie është i lartë 3 metra. Sa larg nga muri i shtëpisë duhet të vendosen shkallët e gjata 5 metra, nëse duam të hipim në kulm?



Detyra 3: Dea kërkon të blejë një laptop me ekranin që ka gjatësitë e brinjëve 40 cm dhe 30 cm. Me çfarë diametri duhet të kërkojë Dea ekranin e laptopit?

Detyra 4: Sa është lartësia h e kulmit të shtëpisë në figurën e dhënë?



Pasi të kryhen vlerësimet, mësimdhënësi u referohet vlerësimeve të nxënësve të bëra në grupe dhe shpallë grupin fitues. Ai/ajo thekson elementet pozitive që kanë bërë grupin të fitojë, në mënyrë që ato të jenë si këshilla për grupet e tjera në të ardhmen.

Reflektimi – 10 min

Nxënësit e ndarë në 4 grupe do të zgjidhin asociacionin e mëposhtëm:

A	B	C	D
Emër	Kosova	Shkronjë	filozof
Iliada	Juglindje të Evropës	numër	matematikan
Poet epik	4 dete	rrethi	Teorema
Odieseu	Siujdhesë	3,14	Themistokleu
Homeri	**Ballkani**	π	**Pitagora**

GREQIA

Asociacioni është i ndërtuar nga 4 shtyllat A,B,C,D poshtë të cilave janë nga 4 fjalë, të cilat së bashku asocojnë në fjalën e shënuar me “bold” në fund të shtyllës. Në fund të 4 fjalët e shënuara me “**Bold**” asocojnë në fjalën përfundimtare “Greqia”. Pra, Homeri është poet grek, Greqia shtrihet në Siujdhesën Ballkanike, njëra nga shkronjat greke është π dhe Pitagora ka qenë matematikan grek.
Loja fillon me njërin grup, i cili do të hapë njërën fushë p.sh. fushën A4 ku shënon Odieseu. Nëse grupi gjen shtyllën në fund, pra fjalën Homeri vetëm me hapjen e një fushe, atëherë grupi fiton 4 pikë. Nëse nuk e gjen, atëherë vazhdon grupi tjetër me hapjen e një fushe tjetër në të njëjtën shtyllë ose në shtyllat e tjera. Nëse grupi e gjen zgjidhjen e shtyllës pas hapjes së dy fushave, p.sh. me hapjen e dy fushave A4- Odiseu dhe A2- Iliada, atëherë ata fitojnë 3 pikë e kështu me radhë derisa të hapen të gjitha fushat e poshtme. Për gjetjen e zgjidhjes përfundimtare, pra të fjalës “Greqia” grupi fiton 5 pikë shtesë. Grupi fitues është ai i cili ka pikë më shumë.
Pas shpalljes së grupit fitues, mësimdhënësi tregon se në klasën e 7 mësohen vetëm disa zbatime të teoremës së Pitagorës, ndërsa zbatimet e tjera do të mësohen në klasën e 8. Prandaj ai/ajo i këshillon nxënësit:

Mbani në mend:

Syprina e sipërfaqes katrore të ndërtuar mbi hipotenuzë është e barabartë me shumën e syprinave të sipërfaqeve katrore të ndërtuara mbi katete.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrën 5 në faqen 96 të librit të matematikës të klasës së VII. Nxënësit e talentuar, përveç kësaj detyre do të formulojnë edhe dy detyra nga jeta praktike në të cilat duhet të zbatohet Teorema e Pitagorës dhe t’i zgjidhin ato.

Reflektimi nga përvoja: Teorema e Pitagorës është një temë e rëndësishme, e cila ka zbatim të shumtë në matematikë. Prandaj mësimdhënësi duhet t’ia kushtojë më shumë se një orë zbatimit të kësaj teoreme në zgjidhjen e detyrave të ndryshme. Meqë në klasën e 7 bëhet vetëm vërtetimi vizual i Teoremës së Pitagorës, atëherë është mirë që mësimdhënësi të koncentrohet në zbatimin praktik të teoremës në zgjidhjen e detyrave nga jeta praktike, të cilat mund të ilustrohen. Ekzistojnë jashtëzakonisht shumë shembuj nga jeta praktike në të cilat kërkohet të zbatohet Teorema e Pitagorës. Mundësia për zgjedhjen e detyrave të tilla ofron rast për mësimdhënësit të jenë kreativ dhe të formulojnë detyra interesante të cilat marrin në konsideratë interesimet e nxënësve. Shembujt e tillë zgjojnë kërshërinë e nxënësve dhe gatishmërinë e tyre për t’i zgjidhur ato. Asociacioni i planifikuar në fund sjellë freski për nxënës pas zgjidhjes së detyrave. Ai po ashtu i kontribuon dhe integrimit të fushave lëndore si: fushës së matematikës, të komunikimit dhe të shkencave.
Puna në grup për zgjidhjen e detyrave dhe për paraqitjen e zgjidhjes në tabelë, si dhe për të zgjidhur asociacionin kultivon bashkëpunimin ndërmjet nxënësve dhe rrit ndjenjën e përgjegjësisë për të kontribuar në arritjen e suksesit më të mirë. Vlerësimi i grupit nga grupet e tjera dhe shpallja e fituesit në fund motivojnë nxënësit jo vetëm të zgjidhin detyrat, por të kultivojë edhe shkathtësitë për prezantim dhe vlerësim. Të gjitha këto ndihmojnë në zhvillimin e disa kompetencave te nxënësit, si: atë të komunikimit, të nxënit, të qytetarit aktiv, etj.

Klasa: VII

Njësia mësimore: Kuptimi i funksionit

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

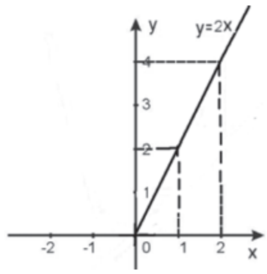
- përkufizojnë funksionin nga bashkësia A në bashkësinë B,
- identifikojnë domenën dhe kodomenën e funksionit,
- identifikojnë mënyrat e ndryshme të dhënies së funksionit.

Fjalët kyçe: Funksion, ndryshore e pavarur, ndryshore e varur, domenë, kodomenë.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, vizorja, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 10 min

Mësimdhënësi lexon këtë detyrë para nxënësve: Një picë e vogël në restorant kushton 2 euro. Sa do të fitojë Genci nga shitja e 1 pice, 2 picave, 3 picave?



Më pas kërkon që nxënësit në grupe të shënojnë në formë të dysheve të renditura lidhjen që ekziston në mes të shitjes së 1, 2 dhe 3 picave, si dhe të hollave të fituara nga shitja e tyre. Dyshet e fituara do t'i paraqesin në sistemin koordinativ në rrafsh dhe do t'i bashkojnë pikat e fituara. Pas realizimit të detyrës, mësimdhënësi pyet nxënësit:

- Çfarë mund të konstatohet për këto pika?
- Sa do të fitojë Genci nga shitja e 6 picave? A i takon dyshja e renditur (6,12) drejtëzës së përcaktuar me pikat e mësipërme?
- Sa pica duhet të shesë Genci për të fituar 10 euro? Si mund ta gjejmë numrin e picave nga drejtëza e përcaktuar me pikat e mësipërme? Pse?
- Çfarë lidhje ekziston në mes të numrit të picave dhe të hollave të fituara?

Në këtë mënyrë mësimdhënësi paraqet qëllimin e njësisë mësimore: Kuptimi i funksionit.

Realizimi i kuptimit – 25 min

Njësia mësimore është ndarë në 3 pjesë. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të lexojnë pjesën e parë në faqen 143. Më pas kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- Sa fiton një instruktor i vallëzimit për 8 orë, nëse një orë punë paguhet 7 euro?
- Sa do të fitojë instruktori për 5 ditë të javës, nëse punon 8 orë në ditë?
- Sa orë ka punuar instruktori, nëse ai ka fituar 161 euro?
- Cila është vlerë hyrëse dhe cila është vlerë dalëse në shembullin 1?
- Si quhet ndryshe vlera hyrëse dhe si ajo dalëse?
- Çka quajmë funksion nga bashkësia A në bashkësinë B? Si shënohet një funksion i tillë?
- Si mund të shënohet funksioni i shembullit 1 me anën e dysheve të renditura?

Mësimdhënësi shoqëron disa nga përgjigjet e nxënësve me shënime në tabelë. Pas dhënies së përgjigjeve, nxënësit vazhdojnë me leximin e pjesës së dytë të njësisë mësimore, e cila përmban shembujt 2 dhe 3 në faqen 144. Pas leximit, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- Pse syprina e sipërfaqes katrore është funksion i gjatësisë së brinjës së katrorit?
- Çka quajmë domenë dhe kodomenë të një funksioni?
- Pse nuk paraqet funksion tabela e parë e dhënë në shembullin 3?
- Pse paraqet funksion tabela e dytë e dhënë në shembulli 3?

Pas dhënies së përgjigjeve, nxënësit vazhdojnë me leximin e pjesës së tretë që përmban shembujt 4 dhe 5. Pas leximit, nxënësit duhet të përgjigjen në pyetjet:

- Cila është shprehja për funksionin e dhënë në shembullin 4?
- Pse bashkësitë e dysheve të renditura të shembullit 5 nën a) dhe b) janë funksione?
- Pse bashkësia e dysheve të renditura të shembullit 5 nën c) nuk është funksion?
- Në sa forma mund të jepet funksioni?

Përgjigja e fundit shënohet në tabelë. Mësimdhënësi tregon edhe disa shembuj të funksioneve nga jeta e përditshme.
Shembulli 1. Nëse me A shënojmë bashkësinë e të gjithë artikujve në një shitore, ndërsa me B bashkësinë e numrave racionalë pozitivë, atëherë procedura e caktimit të çmimeve të artikujve është funksion nga bashkësia A në bashkësinë B.
Shembulli 2. Nëse me A shënojmë bashkësinë e nxënësve të një klase, ndërsa me B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} bashkësinë e notave, ku 0 tregon se nxënësi është i panotuar, atëherë caktimi i notave për nxënësit paraqet funksion nga bashkësia A në bashkësinë B.

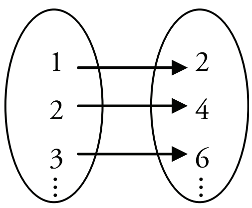
Reflektimi - 10 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grupe të formulojnë një detyrë nga jeta praktike, në të cilën ekziston një lidhje funksionale në mes dy objekteve. Më pas, ai/ajo kërkon që funksionin ta paraqesin në mënyra të ndryshme. Njëri nga grupet do të paraqes zgjidhjen e detyrës në tabelë, p.sh. funksioni që paraqet ndarjen e qelizave në dy pjesë:

a) $y = 2x$;
b) $f = \{(1,2),(2,4),(3,6),...\}$
c)

x	1	2	3	...
y	2	4	6	...

d)



Në fund mësimdhënësi kontrollon arritjen e rezultateve të të nxënit dhe i këshillon nxënësit:

Mbani në mend:

Funksion nga bashkësia A në bashkësinë B quajmë rregullën sipas së cilës çdo elementi nga bashkësia A i shoqërohet një dhe vetëm një element nga bashkësia B.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të formulojnë të paktën 2 detyra nga jeta praktike në të cilat mund të caktohet një funksion. Funksionet e përcaktuara me detyra do t'i paraqesin në forma të ndryshme.

Reflektimi nga përvoja: Funksioni është njëri ndër kuptimet themelore në matematikë, prandaj mësimdhënësi duhet të ketë kujdes që nxënësit të kuptojnë në mënyrë të saktë rregullën që përcakton funksionin, si dhe zbatimin e saj në identifikimin e funksionit gjatë paraqitjes së tij në forma të ndryshme.

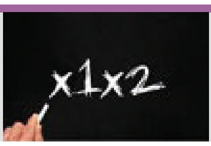
Paraqitja e nocionit të funksionit përmes një shembulli nga jeta praktike është thelbësore për të ndihmuar nxënësit të kuptojnë atë. Shembulli i picës është mjaft i thjeshtë dhe praktik për të ndihmuar nxënësit të kuptojnë funksionin si lidhje ndërmjet objekteve të ndryshme që ka dy karakteristika themelore:

- Çdo numri të shitjes së picave i shoqërohet një fitim.
- Për çdo numër të picave të shitura ka vetëm një shumë të fituar.

Pas kuptimit të funksionit nga shembulli i shitjes së picave, nxënësit janë të gatshëm të lexojnë njësinë mësimore. Për të kontrolluar të kuptuarit e tyre, mësimdhënësi parashtron pyetjet pas çdo pjese të lexuar. Pyetjet e planifikuara janë të niveleve të ndryshme me qëllim që të mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Nxënësit që kanë vështirësi në të nxënë mund të angazhohen në dhënien e përgjigjeve triviale ose atyre që kanë të bëjnë me llogaritje të thjeshta, ndërsa të talentuarit sfidohen përmes pyetjeve, përgjigjet e së cilave kërkojnë të menduar të nivelit të lartë, si dhe analizimin e formave të ndryshme të dhënies së funksionit.

Aktivitetet e planifikuara synojnë zhvillimin e të gjitha kompetencave tek nxënësit, si:

- kompetencën e komunikimit, përmes formulimit të përgjigjeve.
- kompetencën e të menduarit, përmes analizës së rasteve.
- kompetencën e të nxënit, përmes nxjerrjes së përfundimeve.
- kompetencën personale, përmes shembujve nga jeta praktike që mund të ndikojnë në orientimin në karrierë.
- kompetencën e punës dhe jetës, përmes shembullit të shitjes së picës.
- kompetencën e qytetarisë aktive, përmes zgjidhjes së detyrave në grup.



Klasa: VIII

Njësia mësimore: Numrat dhjetorë dhe numrat thyesorë

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- shkruajnë një numër thyesor si numër dhjetor,
- shkruajnë numrat dhjetorë të fundmë dhe ata periodikë si numra thyesorë.

Fjalët kyçe: Numër dhjetor, numër dhjetor periodik, numër i pastër dhjetor periodik, numër dhjetor i përzier periodik, paraperioda.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 5 min

Nxënësit organizohen në grupe me nga 4 anëtarë. Secili anëtar i grupit do të zgjidhë njërën nga detyrat:

Detyra 1. Shkruaje si numër dhjetor thyesën $\frac{2}{5}$.

Detyra 2. Shkruaje si numër dhjetor thyesën $\frac{2}{11}$.

Detyra 3. Shkruaje si numër dhjetor thyesën $\frac{27}{55}$.

Detyra 4. Shkruaje si numër thyesor numrin dhjetor 2.058.

Mësimdhënësi kërkon që secila nga detyrat të zgjidhet në tabelë nga një nxënës. Nxënësit e tjerë i kontrollojnë rezultatet e tyre dhe i korigjojnë në rast nevoje.

Realizimi i kuptimit - 30 min

Mësimdhënësi shfrytëzon shembujt 1-3 për të treguar se numrat thyesorë mund të shkruhen si numra dhjetorë të fundmë ose numra dhjetorë periodikë, ku numrat dhjetorë periodikë mund të jenë numra dhjetorë të pastër periodikë (vetëm me shifra që përsëriten) ose numra dhjetorë periodikë të përzier (me shifra që përësriten dhe që nuk përsëriten). Ndërsa, përmes shembullit 4 tregohet shndërrimi i numrit dhjetor periodik të fundmë në numër thyesor. Mësimdhënësi u sqaron nxënësve se ata do të lexojnë njësinë mësimore dhe do të kuptojnë se si bëhet shndërrimi i numrave dhjetorë periodikë në thyesa.

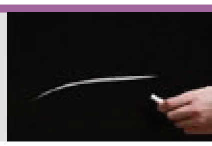
Mësimdhënësi kërkon që të gjithë nxënësit të lexojnë në faqen 12 shembullin 3 nën a). Pas leximit, dy nga anëtarët e grupit do ta sqarojnë shembullin për anëtarët e tjerë të grupit. Pra, nxënësit do të sqarojnë procedurën:

$$x = 0.222.../\cdot 10$$
$$10x = 2.222...$$
$$10x = 2 + 0.222...$$
$$10x = 2 + x$$
$$10x - x = 2$$
$$9x = 2$$
$$x = \frac{2}{9}.$$

Më pas, të gjithë nxënësit lexojnë shembullin 3 nën b). Dy nxënësit e tjerë të grupit që më parë dëgjuan tash do ta sqarojnë shembullin për anëtarët e tjerë. Në fund të gjithë nxënësit lexojnë shembullin 3 nën c). Një nxënës do ta sqarojë shembullin në tabelë.

Duke u bazuar në shembujt e mësipërm, mësimdhënësi nxjerrë formulën e përgjithshme për shndërrimin e numrave të pastër periodikë në thyesa dhe sqaron shndërrimin e numrit dhjetor të përzier periodik në thyesë.

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të gjejnë shembuj nga jeta e përditshme kur ata ballafaqohen me thyesat, numrat dhjetorë dhe përqindjet. Ky është një moment i përshtatshëm për mësimdhënësin të sqarojë lidhjen që ekziston në mes të thyesave, numrave dhjetorë dhe përqindjeve.



Reflektimi – 5 min

Mësimdhënësi shënon në tabelë 6 detyrat e mëposhtme:

1) 0.555...; 2) 0.2323...; 3) 0.213213...; 4) 0.31212...; 5) 0.1222...; 6) 1.1111...

Ai/ajo kërkon që nxënësit e një grupi në mënyrë individuale të bëjnë shndërrimin e një numri dhjetor periodik të dhënë në thyesë. Pas zgjidhjes së detyrës nxënësit e grupit do të krahasojnë rezultatet në mes vete dhe do të bëjnë korigjimet në rast nevoje.

Në fund, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjen:

- Si mund të shprehet me anën e numrave dhjetorë, me anën e thyesave dhe të përqinjdes fakti se në zgjedhjet e fundit nuk kanë votuar çereku i votuesve?

Mësimdhënësi kontrollon arritjen e rezultateve të të nxënit dhe i këshillon nxënësit:

Mbani në mend:

Çdo thyesë mund të shënohet si numër dhjetor i fundmë ose periodik dhe anasjelltas, çdo numër dhjetor i fundmë ose periodik mund të shënohet si thyesë.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të plotësojnë këto tabela duke bërë shndërrimet e nevojshme:

THYESË	NUMËR DHJETOR
$\frac{3}{5}$	
$\frac{1}{9}$	
$\frac{5}{12}$	
$\frac{133}{99}$	

NUMËR DHJETOR	THYESË
0,213	
0,3131...	
0,132132...	
1,111...	

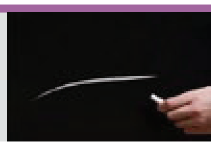
Mësimdhënësi mund të kërkojë nga nxënësit e talentuar të shndërrojnë në numra thyesorë këta numra dhjetorë: 0.99999...; 1.99999...; 2.99999... ;

Reflektim nga përvoja: Detyrat në fillim të orës do të motivojnë secilin nxënës për t'u përfshirë në procesin mësimor, sepse zgjidhja e tri detyrave të para kërkon pjesëtimin e dy numrave, ndërsa e katërta shndërrimin e numrit dhjetor të fundmë në thyesë. Të gjitha këto janë veprime të njohura për nxënësit sepse i kanë mësuar në klasat e mëparshme. Kjo do të ndihmojë mësimdhënësin që një pjesë të njësisë mësimore ta sqarojë përmes detyrave që zgjidhin nxënësit. Pjesa tjetër e orës mund të përdoret në mënyrë efektive për të sqaruar pjesën tjetër të njësisë mësimore dhe kryesisht shndërrimin e numrave dhjetorë periodikë në numra thyesorë.

Njësia mësimore është planifikuar të shtjellohet përmes teknikës mësimdhënia e ndërsjellë. Realizimi i teknikës kërkon që të gjithë nxënësit të lexojnë një pjesë të njësisë mësimore dhe pastaj dy anëtarë të grupit ta sqarojnë pjesën e lexuar për anëtarët e tjerë, pra të kenë rolin e mësimdhënësit. E njëjta procedurë zbatohet edhe gjatë leximit të pjesëve të tjera. Përmes zbatimit të kësaj teknike, te nxënësit arrijmë të zhvillojmë kompetencën e komunikimit (sqarimi i përmbajtjes anëtarëve të tjerë të grupit), atë të të menduarit (analiza e informacionit të lexuar) dhe kompetencën e të nxënit (përforcimi i njohurive në mënyrë që t'iu sqarohen të tjerëve).

Kjo teknikë është shumë e përshtatshme për t'u përdorur në klasë. Për të tejkaluar pengesat që mund të kenë nxënësit me vështirësi në të nxënë, është planifikuar që roli i mësimdhënësit të realizohet në dyshe. Kjo ofron mundësi të krijimit të dysheve të përziera me nxënës të talentuar dhe me ata që kanë vështirësi në të nxënë. Mirëpo, mësimdhënësi duhet të kujdeset që nxënësit e talentuar të ndihmojnë nxënësit e tjerë dhe jo t'i neglizhojnë ata.

Teknika e mësimdhënies së ndësjellë është sidomos e përshtatshme të realizohet në këtë moshë, sepse nxënësit janë në gjendje të kuptojnë rolin e tyre si mësimdhënës dhe të marrin përgjegjësi për realizimin e tij me sukses. Është provuar se nxënësit arrijnë të mësojnë më së miri kur e dinë se e kanë obligim ta sqarojnë informacionin e fituar për të tjerët. Pikërisht për këtë qëllim është mirë që kjo teknikë të zbatohet me nxënës.



Klasa: VIII

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- gjejnë pikën simetrike të një pike të dhënë lidhur me një drejtëz të dhënë,
- konstruktojnë figurën simetrike të një figure të dhënë lidhur me një drejtëz të dhënë,
- konstruktojnë boshtin e simetrisë te disa figura.

Njësia mësimore: Simetria boshtore

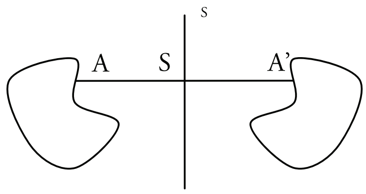
Fjalët kyçe: Boshti i simetrisë, pikë simetrike, figura simetrike.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, fletë A4, vizorja, kompasi, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 10 min

Aktiviteti i parë: Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grup:

- Të palosin një letër në dysh.
- Dy faqet e letrës së palosur t'i grisin njëkohësisht me dorë duke krijuar një figurë çfarëdo.
- Të shënojnë me s vijën sipas së cilës është bërë palosja.
- Të shënojnë me A një pikë në njërën nga figurat.
- Të bashkojnë pikën A të figurës së parë me pikën A' të figurës tjetër, e cila ka të njëjtën pozitë në figurë sikur pika A në figurën e parë.
- Të shënojnë me S pikë prerjen e drejtëzës s me segmentin AA'.

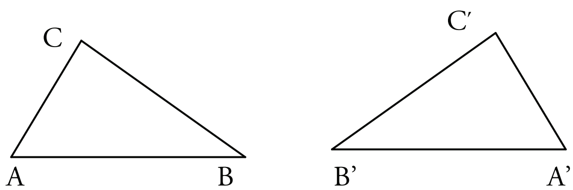


Realizimi i kuptimit – 15 min

Meqenëse për simetrinë boshtore nxënësit kanë mësuar dhe në klasat e mëparshme, atëherë mësimdhënësi mund ta shtjellojë këtë temë duke paraqitur ndonjë material nga interneti, të cilin e shoqëron me parashtrim të pyetjeve, diskutim të përgjigjeve nga ana e nxënësve, si dhe plotësim të informacioneve në rast nevoje. Mësimdhënësi paraqet para nxënësve materialin: Hyrje në simetrinë boshtore nga uebfaqja: **http://www.youtube.com/watch?v=TVY1zgH3i0Q**. Më pas, ai/ajo kërkon nga nxënësit që të reflektojnë në lidhje me aktivitetin e parë dhe materialin, si dhe të përgjigjen në pyetjet:

- Çfarë këndi formon drejtëza AA' me drejtëzën s? Çfarë mund të thuhet për segmentet AS dhe SA'?
- Si mund të gjejmë pikën simetrike të një pike të dhënë lidhur me një drejtës të dhënë?
- Çfarë ndodh nëse pika A do të ishte në drejtëzën e simetrisë s?
- Si mund të gjejmë figurën simetrike të një figure të dhënë lidhur me një drejtës të dhënë?
- Çfarë duhet bërë për të gjetur më lehtë figurën simetrike të figurës së ndërtuar nga segmentet?
- Çfarë mund të thuhet për formën dhe madhësinë e figurave simetrike?
- Çfarë ndodh nëse boshti i simetrisë kalon nëpër figurë?
- Me çka përputhet boshti i simetrisë së një segmenti?

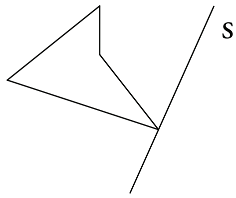
Aktiviteti i dytë: Mësimdhënësi i shpërndan çdo dysheje të nxënësve një fletë në të cilën janë vizatuar dy trekëndësha kongruentë si më poshtë dhe kërkon që nxënësit të gjejnë boshtin e simetrisë së këtyre trekëndëshave. Ndërkohë ai/ajo vizaton trekëndëshat në tabelë.



Pas përfundimit të detyrës, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të konstruktojnë në tabelë boshtin e simetrisë së trekëndëshave. Mësimdhënësi bashkë me nxënësit do të diskutojnë dy mënyrat e konstruktimit të boshtit të simetrisë për trekëndëshat e dhënë:

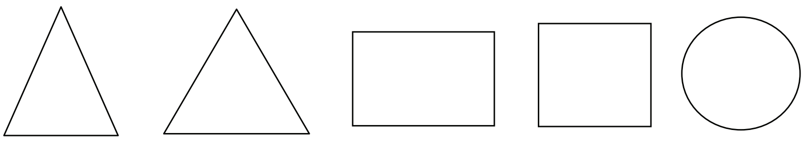
- konstruktimit të simetrales së segmentit BB'
- konstruktimit të drejtëzës që kalon nëpër mesin e segmenteve BB' dhe CC'.

Reflektimi – 20 min



Nxënësit do të vizatojnë në fletoret e tyre një katërkëndësh çfarëdo dhe një drejtëz s që kalon nëpër njërin kulm të tij. Më pas, ata do të gjejnë figurën simetrike të katërkëndëshit lidhur me drejtëzën s. Pas përfundimit të detyrës nxënësit do të shkëmbejnë fletoret me një bashkëmoshatarë dhe do të shënojnë një koment lidhur me saktësinë e punës së bërë të shokut/shoqes së tyre.

Derisa nxënësit punojnë në mënyrë individuale detyrën e mësipërme, mësimdhënësi u shpërndan grupeve nga një fletë në të cilën ka vizatuar një trekëndësh barakrahësh, një trekëndësh barabrinjës, një drejtkëndësh, një katror dhe një rreth. Ai/ajo kërkon që nxënësit në grup të gjejnë numrin e boshteve të simetrisë që mund të konstruktohen në secilën nga figurat e dhëna.



Rezultatet e detyrës do të komentohen nga nxënësit. Më pas, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të identifikojnë disa objekte në klasë në të cilat mund të vizatohet boshti i simetrisë.

Në fund, mësimdhënësi kërkon që gjysma e nxënësve të shënojnë në formë vertikale fjalën SIMETRIA dhe gjysma tjetër fjalën BOSHTORE. Për secilën shkronjë të fjalës së caktuar për ta, nxënësit do të gjejnë një nocion matematikë që fillon me atë shkronjë, p.sh.

Syprina e sipërfaqes	**B**oshti
Inekuacioni	**O**rigjina e sistemit koordinativ
Monom	**S**hprehja numrike
Ekuacioni	**T**angjenta
Trekëndëshi	**O**rtoqendra
Rombi	**R**elacioni
Indeksi	**E**lementi
Apotema	

Dy nxënës do të lexojnë nocionet e gjetura.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrat 1 dhe 2 në librin e matematikës. Një grup i nxënësve të talentuar do të punojnë së bashku për të përgatitur një prezantim në lidhje me simetrinë boshtore. Për prezantimin e tyre ata mund të shërbehen me materialin nga uebfaqja: **http://www.youtube.com/watch?v=v0cxlpIpEj0.**

Reflektimi nga përvoja: Njësia mësimore është e njohur për nxënësit, prandaj shtjellimi i saj është bërë përmes aktiviteteve të ndryshme praktike, prezantimit të materialit nga interneti dhe parashtrimit të pyetjeve për të orientuar nxënësit që në mënyrë të pavarur të nxjerrin konstatimet e duhura.

Ekzistojnë shumë aktivitete praktike dhe vizatime të cilat mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor, e veçanërisht të atyre që kanë vështirësi në të nxënë. Prezantimi do të ndihmojë nxënësit me vështirësi në të nxënë që të vizualizojnë konceptin e simetrisë boshtore dhe të kuptojnë atë më lehtë. Nxënësit e talentuar kanë mundësi të sfidohen përmes pyetjeve, përgjigjet e të cilave kërkojnë nivel të lartë të të menduarit, si dhe duke kërkuar nga ata të gjejnë të gjitha boshtet e simetrisë së figurave të dhëna. Përmes realizimit të aktiviteteve arrihet që te nxënësit të zhvillohen kryesisht:

- kompetenca e komunikimit përmes gjetjes së fjalëve për shkronjat e dhëna dhe formulimit të përgjigjeve,
- kompetenca e të menduarit duke analizuar rastet dhe duke kryer e aktivitetet,
- kompetenca e të nxënit përmes sintetizimit të informacionit të fituar për zgjidhjen e detyrave,
- kompetenca e qytetarisë gjatë punës në grup, ku secili individ ka përgjegjësitë e veta dhe i kontribuon realizimit të detyrës.

Klasa: VIII

Njësia mësimore: Llogaritja e probabiliteteve (gjasës)

Fjalët kyçe: Probabiliteti i ngjarjes, ngjarja e pamundshme, ngjarja e sigurtë, shkalla e probabilitetit.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, dy zarë, një ilustrim, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- gjejnë probabilitetin e ngjarjeve të ndryshme,
- paraqesin probabilitetin e ngjarjeve në një shkallë të probabilitetit,
- gjejnë shembuj nga jeta për të cilat mund të llogaritet probabiliteti i një ngjarje të caktuar.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 5 min

Mësimdhënësi kërkon që një nxënës të mbajë në dorë një zar në të cilin janë shënuar numrat 1 deri në 6.
Ai/ajo pyet nxënësit:

- Çfarë numri mund të bie, nëse një nxënës e hudh zarin?
- Sa mundësi ekzistojnë për të fituar një numër gjatë hedhjes së zarit?

Kërkon që nxënësi të hudh zarin. Mund të ndodhë që të bie numri 3.

- Si mund të shënohet mundësia për të ra numri 3 gjatë hedhjes së zarit?

Nga përgjigjet e nxënësve arrihet në përfundimin se gjatë hedhjes së zarit në faqen e sipërme të tij do të kemi njërin nga numrat 1,2,3,4,5,6. Ky është një rast i përshtatshëm për mësimdhënësin që të sqarojë mënyrën e llogaritjes së probabilitetit të ngjarjeve.

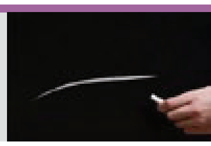
Realizimi i kuptimit – 25 min

Mësimdhënësi sqaron se probabiliteti për të ra një numër p.sh. numri 3 gjatë hudhjes së zarit është $\frac{1}{6}$. Ai/ajo sqaron se numri i të gjitha rasteve të mundshme duhet të shënohet në emërues, ndërsa numri që lidhet me ngjarjen që kërkohet si kusht duhet të shënohet në numërues.

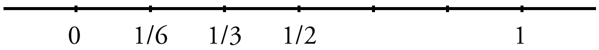
Pas sqarimit, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të punojnë në dyshe dhe të përgjigjen në pyetjet e mëposhtme.
Gjatë hudhjes së zarit:

- Sa është probabiliteti që të bie numri 1?
- Sa është probabiliteti që të bie një numër çift?
- Sa është probabiliteti që të bie një numër më i vogël se 3?
- Sa është probabiliteti që të bie numri 7?
- Sa është probabiliteti që të bie një numër më i vogël ose baraz me 6?

Disa nxënës do të paraqesin zgjidhjet në tabelë.



Mësimdhënësi shfrytëzon rastin të sqarojë nocionet e ngjarjes së pamundshme dhe ngjarjes së sigurt. Më pas, ai/ajo kërkon që nxënësit të paraqesin ngjarjet e pyetjeve të mësipërme në një shkallë të probabilitetit.



Për të kontrolluar të kuptuarit e nxënësve, mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grupe të zgjidhin detyrat e mëposhtme, t'i shënojnë zgjidhjet me anën e numrave racionalë dhe dhjetorë, si dhe t'i paraqesin zgjidhjet në një shkallë të probabilitetit .

Detyrë 1: Në një shportë të mbyllur ka 4 molla, 2 dardha, 3 pjeshka dhe 1 portokall. Sa është probabiliteti që një nxënës pa shikuar të nxjerrë nga shporta: a) një mollë, b) një dardhë, c) një pjeshkë, d) portokallin, e) një mollë ose portokallin, f) njërën nga pemët që gjenden në shportë, g) një ananas?

	K	S
K	K,K	
S		

Detyra 2: Është realizuar një eksperiment me hedhjen e dy monedhave. Njërën anë të monedhës e shënojmë me K (kokë) dhe tjetrën me S (stemë). Me anën e këtyre simboleve plotësoni tabelën e mëposhtme dhe gjeni probabilitetin e ngjarjeve gjatë dy hedhjeve:
• Bien dy koka.
• Bie një kokë dhe një stemë (pa marrë parasysh renditjen)

Dy nxënës do të paraqesin zgjidhjet në tabelë. Mësimdhënësi paraqet para nxënësve një ilustrim në të cilin gjendet një roletë e lojërave më fat. Ai/ajo kërkon që nxënësit në mënyrë individuale të gjejnë probabilitetin e disa ngjarjeve që fitohen pas rrotullimit të ruletit. Ngjarjet janë, pas rrotullimit ruleti ndalet:

- Në ngjyrën e kuqe.
- Në ngjyrën e kaltër
- Në ngjyrën e verdhë ose të gjelbër.

Nxënësit krahasojnë rezultatet brenda grupeve. Nëse ndonjë nxënës nuk i ka zgjidhjet e duhura, anëtarët e grupit e ndihmojnë për t'i korrigjuar ato.

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të rikujtojnë probabilitetin e ngjarjes së pamundshme, ngjarjes së sigurt dhe lidhjen që ekziston ndërmjet numëruesit dhe emëruesit të thyeses, si dhe kërkesës dhe mundësive të një ngjarje të mundshme.

Duke pasur këto parasysh ai/ajo kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjen:

Sa është vlera më e vogël dhe ajo më e madhe që mund të ketë probabiliteti i një ngjarje?
Në fund, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të gjejnë raste nga jeta praktike në të cilat duhet të njehsohet probabiliteti i ngjarjeve të ndryshme, si p.sh. lotaritë e fatit, parashikimi i motit, lojërat në sport, kompanitë e sigurimeve, hulumtimet, etj.

Reflektimi -15 min

Nxënësit në grupe do të zgjidhin detyrën: Një eksperiment është realizuar me hedhjen e njëkohshme të dy zareve të njëjtë. Plotësoni tabelën me bashkësinë e të gjitha realizimeve të mundshme të eksperimentit dhe gjeni probabilitetin për këto ngjarje (rradha e numrave që bien në zar nuk mirret parasysh, pra është e njëjta ngjarje nëse në zarë bien numrat (4,5) ose (5,4)):

1	2	3	4	5	6	
(1,1)						1
						2
						3
				(5,4)		4
						5
						6

- Bien dy numra 6.
- Bien një numër 3 dhe një numër 4.
- Shuma e numrave që bien nuk është më e madhe se 3.
- Ndryshimi i numrave që bien është më i vogël se 3.
- Prodhimi i numrave që bien është numër tek.
- Herësi i numrave që bien është 2.
- Numrat që bien janë të plotpjestueshëm.
- Shuma e katrorëve të numrave që bien është më e vogël se 10.
- Ndryshimi i katrorëve të numrave që bien është 3.
- Shuma e rrënjëve katrore të numrave që bien është 3.

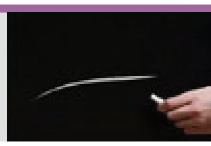
Mësimdhënësi monitoron punën e grupeve dhe ofron ndihmë sipas nevojës. Nëse detyra nuk mund të zgjidhet deri në fund të orës, atëherë ajo mbetet të plotësohet si detyrë shtëpie.

Detyrë shtëpie: Për punë të pavarur nxënësit do të zgjidhin detyrën 3 nga libri dhe të arsyetojnë faktin se loja e fatit, si më poshtë, i sjell fitim pronarit të saj.

2	3	4	5	6	
7	8	9	10	11	12

Një person u ofron qytetarëve të luajnë dhe të fitojnë sipas kësaj rregulle: Pjesëmarrësit duhet të paguajnë 2€ për pjesëmarrje në lojë. Ata duhet të hedhin dy zare. Nëse shuma e numrave që bien është e barabartë me një numër që gjendet në fushat e hijezuara të tabelës, atëherë personi që ka hedhur zaret fiton dyfishin e shumës që ka paguar, në të kundërtën fitues është pronari i zareve dhe lojtari humb 2€ e paguara në fillim. Pronari i zareve i josh qytetarët duke theksuar faktin se ata kanë më shumë fusha (6 fusha), ndërsa ai vetëm 5.

Reflektimi nga përvoja: Detyrat dhe aktivitetet e planifikuara për këtë njësi mësimore janë shumë praktike dhe të bazuara në shembuj nga jeta reale. Përmes detyrave të tilla është synuar zgjimi i kureshtjes dhe interesimit të nxënësve për të nxënë. Detyrat që kanë lidhje me jetën reale zgjojnë vullnetin e nxënësve për t'u përfshirë në aktivitete pa marrë parasysh aftësitë e tyre në matematikë. Nxënësit që kanë vështirësi në të nxënë mund të angazhohen në hedhjen e zarit, plotësimin e tabelave dhe gjetjen e probabiliteteve të ngjarjeve më të thjeshta, ndërsa nxënësit e talentuar mund të sfidohen në gjetjen e probabiliteteve të ngjarjeve më të ndërlikuara, ku identifikimi i kërkesës kërkon të menduar të nivelit më të lartë. Në veçanti është interesante detyra në fazën e reflektimit, sepse përmes zgjidhjes së saj, nxënësit përforcojnë shumë veprime matematikore. Me interes është edhe detyra e shtëpisë, e cila ka për qëllim që të vetëdijësojë nxënësit që të mos bien pre e lojërave të përgatitura nga manipulantë të ndryshëm. Sa më shumë aftësohen nxënësit në llogaritjen e probabiliteteve të ngjarjeve të ndryshme aq më të sigurt bëhen ata për të vlerësuar gjasat për të pasur sukses në iniciativat e tyre.



Klasa: VIII

Njësia mësimore: Prodhimet e veçanta

Ndryshimi i katrorëve

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,

Fjalët kyçe: Ndryshimi i katrorëve.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, vizorja, gërshërët.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- artikulojnë rregullën për ndryshimin e katrorëve.
- vërtetojnë rregullën për ndryshimin e katrorëve në mënyrë analitike dhe gjeometrike,
- zbatojnë rregullën për ndryshimin e katrorëve në zgjidhjen e detyrave të ndryshme.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 5 min

Kërkohet që nxënësit në mënyrë individuale, duke përdorë rregullën për shumëzimin e polinomit me polinom (binomit me binom), si dhe duke bërë reduktimin e polinomit të fituar të gjejnë prodhimin:

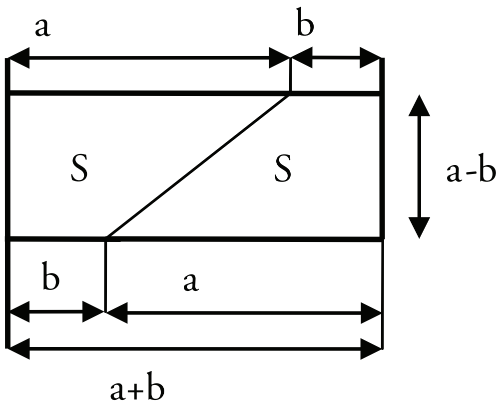
$$(a+b)(a-b) =$$

Pas zgjidhjes së detyrës, nxënësit krahasojnë rezultatin brenda grupit. Nëse ndonjë nxënës nuk e ka rezultatin e saktë, atëherë një anëtar brenda grupit e ndihmon atë ta korrigjojë. Një nxënës shënon zgjidhjen e detyrës në tabelë.

Realizimi i kuptimit – 25 min

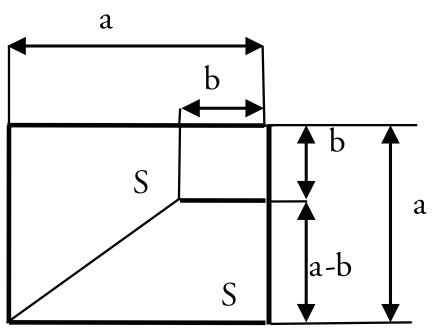
Mësimdhënësi kërkon që një nxënës të formulojë rregullën për ndryshimin e katrorëve duke lexuar formulën e shënuar në tabelë. Më pas ai/ajo kërkon që nxënësit të kryejnë 2 aktivitete.
Aktiviteti i parë: Mësimdhënësi shënon në tabelë $a = 5cm$ dhe $b = 2cm$ dhe kërkon që nxënësit në mënyrë individuale:

- Të vizatojnë një drejtkëndësh me gjatësi të brinjëve $a+b$ dhe $a-b$.
- Të vizatojnë dy trapezë kënddrejtë me të njëjtat të dhëna: me bazat *a* dhe *b*, si dhe lartësi *a-b*.
- Të presin me gërshërë dy trapezat.
- Të vendosin trapezat mbi sipërfaqen drejtkëndëshe ashtu që lartësitë e trapezave të përputhen me brinjët përkatëse të drejtkëndëshit.
- Të tregojnë se çfarë konstatuan dhe të shënojnë formulën për syprinën e sipërfaqes së dy trapezave 2S duke përdorë formulën për njehsimin e syprinës së sipërfaqes së drejtkëndëshit të formuar me ta.



Aktiviteti i dytë: Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në mënyrë individuale:

- Të vizatojnë një katror me gjatësinë e brinjës a dhe brenda këtij katrori një katror me gjatësinë e brinjës b, dy brinjë të të cilit shtrihen në dy brinjët fqinje të katrorit të parë.
- Të vendosin trapezat mbi sipërfaqen e katrorit me gjatësi të brinjës a ashtu që sipërfaqja e tyre të mos mbulojë ndonjë pjesë të sipërfaqes së katrorit me brinjë b.
- Të tregojnë çfarë fituan dhe të shënojnë formulën për syprinën e sipërfaqes së dy trapezave 2S duke përdorur formulën për njehsimin e syprinave të sipërfaqeve katrore.



Nga dy aktivitetet, mësimdhënësi ndihmon nxënësit të arrijnë në përfundimin:

$$\left.\begin{aligned} 2S &= (a+b)(a-b) \\ 2S &= a^2 - b^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Mësimdhënësi pyet nxënësit:

- Çfarë ndodh nëse gjatësitë e brinjëve plotësojnë realcionin $a \leq b$?

Nëse nxënësit nuk arrijnë të japin përgjigje, atëherë mësimdhënësi ofron sqarimet e tij. Për të zbatuar formulën e mësipërme, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të punojnë në dyshe për të zgjidhur detyrat e mëposhtme:

a) $(x-5)\cdot(x+5)=$, b) $y^2-2^2=$, c) $a^2-144=$, d) $-2a^2+8=$ __$(a^2-$ __ $)=$

e) $(2x-$ __ $)\cdot($__ $+3)=4x^2-9$, f) $x^4-1=(x^2)^2-1^2=$.

Disa nxënës shënojnë zgjidhjet në tabelë. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të njehsojnë prodhimin $68\cdot72$ në dy mënyra:

- duke shumëzuar numrat si zakonisht,
- duke vazhduar detyrën:

$$68\cdot72=(70-2)\cdot(70+2)=$$

Kërkohet që nxënësit të nxjerrin përfundimin nga zgjidhja e detyrës.

Reflektimi – 15 min

Aktiviteti i tretë: Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grupe:

- të njehsojnë: 2^2-1^2, 3^2-2^2, 4^2-3^2, 5^2-4^2 ,
- të gjejnë se çfarë numra janë rezultatet,
- $\forall k\in Z$, të njehsojnë: $(k+1)^2-k^2=$
- të formulojnë rregullën për ndryshimet e mësipërme.

Dy nxënës do të paraqesin punën e bërë nga grupi. Mësimdhënësi sqaron rregullën e mësipërme: Të gjithë numrat tek mund të paraqiten si ndryshim i katrorëve të dy numrave të njëpasnjëshëm. Ai/ajo tregon se një rregull e tillë është e vërtetë, sepse:

- shuma e çdo dy numrave të njëpasnjëshëm është numër tek $(k+1)+k=2k+1$
- ndyshimi i çdo dy numrave të njëpasnjëshëm është baras me 1, $(k+1)-k=1$
- numrat tek, si edhe numrat e tjerë, mund të shprehen si prodhim i vetvetes me numrin 1. Pra, numrat tek mund të shprehen në formën

$$2k+1=(2k+1)\cdot 1=[(k+1)+k]\cdot[(k+1)-k]=(k+1)^2-k^2$$

Në fund, mësimdhënësi u tregon nxënësve se nuk ekziston një formulë e ngjashme për zbërthimin në faktorë të shumës së katrorëve pra, shprehja a^2+b^2 nuk mund të zbërthehet në faktorë në bashkësinë e numrave realë. Ai/ajo i këshillon nxënësit:

Mbani në mend:

Ndryshimi i katrorëve të dy numrave është i barabartë me prodhimin e shumës dhe ndryshimit të tyre.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të gjejnë se cilët numra çift nga 1 deri në 10 mund të shprehen si ndryshim i katrorëve të dy numrave. Nxënësit e talentuar duhet të vazhdojnë detyrën deri te numri 20 dhe të analizojnë natyrën e numrave të tillë.

Reflektimi nga përvoja: Formula për ndryshimin e katrorëve është mjaft e rëndësishme në matematikë, sidomos në faktorizimin e polinomeve dhe thjeshtimin e shprehjeve algjebrike. Për këtë arsye, nxënësit duhet ta kuptojnë mirë këtë formulë në mënyrë që ta zbatojnë atë në zgjidhjen e detyrave të ndryshme. Prandaj, krahas vërtetimit analitik mësimdhënësi duhet të bëjë dhe vërtetimin gjeometrik në mënyrë që përmes vizualizimit të shtojë gjasat e nxënësve për ta mbajtur në mend atë. Vërtetimi gjeometrik i formulës është planifikuar të realizohet përmes dy aktiviteteve praktike, sepse ato ofrojnë dy përparësi:

- gjithëpërfshirjen e nxënësve në realizimin e aktiviteteve,
- realizimi praktik ndihmon të kuptuarit e rregullës nga nxënësit dhe mbajtjen në mend të saj për një kohë më të gjatë.

Rregulla bëhet edhe më interesante përmes zbatimit të saj në njehsimin më të shpejtë të prodhimeve të disa numrave. Nxënësit me vështirësi në të nxënë kanë mundësi të realizojnë aktivitetet praktike dhe të zgjidhin ndonjë nga detyrat trivale, ndërsa të talentuarit mund të koncentrohen në nxjerrjen e përfundimeve, formulimin e rregullave dhe zbatimin e tyre në detyra që kërkojnë të menduar të nivelit të lartë. Shembulli i fundit për shprehjen e numrave tek si ndyshim të katrorëve të dy numrave të njëpasnjëshëm zgjon kërshërinë e nxënësve, e cila vazhdon edhe gjatë realizimit të detyrave të shtëpisë. Ky shembull mund të stimulojë nxënësit e talentuar për të gjetur rregulla të ndryshme që mund të plotësohen nga numra të caktuar.

Klasa: VIII

Njësia mësimore: Zgjidhja e problemeve me ekuacione

Fjalët kyçe: përkthimi i problemit në gjuhë algjebrike, shprehje algjebrike,

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tebela, fletë A4, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- shprehin me anën e ekuacioneve problemet e ndryshme të cilat janë të dhëna në formë të shkruar ose të shprehuara verbalisht,
- zgjidhin ekuacione që fitohen nga problemet e ndryshme.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 10 min

Mësimdhënësi ka përgatitur nga një fletë për secilin grup. Në secilën fletë ka shënuar nga një ekuacion të ndryshëm, të cilin do ta zgjidhin 4 anëtarët e grupit ashtu që çdo nxënës shënon një rresht të zgjidhjes dhe pastaj ia përcjellë fletën shokut/shoqes në të djathtë, i/e cila e kontrollon detyrën e zgjidhur deri në atë fazë dhe plotëson zgjidhjen me rreshtin vijues. Kjo vazhdon deri në gjetjen e zgjidhjes së detyrës dhe bërjen e provës.

a) $2(3x+1)=\frac{x-7}{2}$ b) $\frac{2}{3}x+1=2x+3$ c) $-2(x-1)=x+\frac{1}{2}$

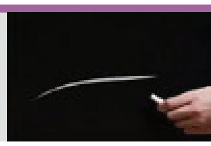
b) $-3(x-\frac{2}{3})=-x+1$ e) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3}=1$ f) $2.4x-1.3=-3.1x-2.4$.

Dy nga detyrat e dhëna do të zgjidhen në tabelë nga dy përfaqësues të grupeve.

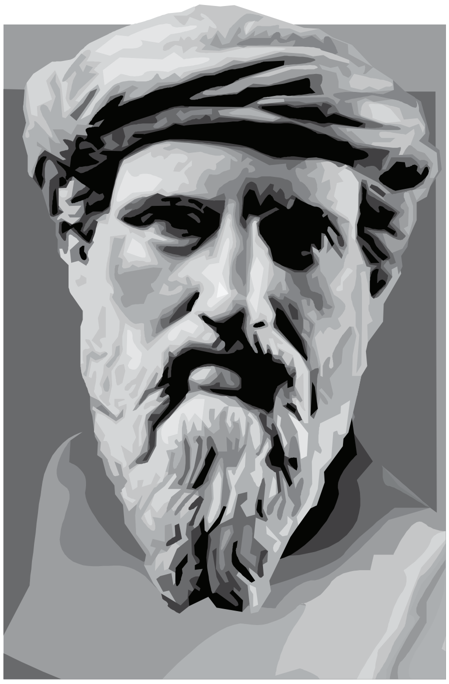
Realizmi i kuptimit - 25 min

Mësimdhënësi tregon se në jetën e përditshme hasim në probleme, të cilat nuk janë të dhëna në formë të ekuacionit, por ato janë të shprehura me fjalë ose të shkruara. Prandaj, është me rëndësi të kuptohet mënyra e përkthimit të tyre në gjuhën e algjebrës, në mënyrë që pastaj të zbatohet aparati i zgjidhjes së ekuacioneve që është mësuar në orët e kaluara. Ai/ajo u tregon nxënësve 6 hapat që duhet të realizohen gjatë procesit të formulimit të ekuacionit nga problemi i dhënë, zgjidhja e tij dhe bërja e provës.

- Problemi duhet të lexohet me kujdes në mënyrë që të kuptohet dhe të caktohen të njohurat dhe të panjohurat. Të panjohurat i shënojmë me shkronja.
- Të skicohet ndonjë grafik, tabelë apo vizatim, nëse është e dobishme.
- Të shënohen shprehjet që mund të formohen nga detyra.
- Të shtrohet ekuacioni.
- Të zgjidhet ekuacioni.
- Të bëhet prova.



Mësimdhënësi demonstron zbatimin e hapave përmes zgjidhjes së një detyre që ka të bëjë me jetën e matematikanit të njohur Diofant. Ai/ajo tregon se për matematikanin Diofant dihet shumë pak. E tërë ajo që dihet për të është e shkruar në epitafin e tij. Për të kuptuar epitafin duhet të dimë formulimin e ekuacioneve lineare me një të panjohur dhe zgjidhjen e tyre. Mbishkrimi mbi varrin e tij duket kështu:



Udhëtar, këtu është varrosur Diofanti. Përmes shifrave në gurë mund të tregohet sa ka jetuar ai:
"Një të gjashtën e jetës e kaloi në fëmijëri,
Një të dymbëdhjetën e kaloi në rini,
Një të shtatën e jetës e kaloi në martesë pa fëmijë,
Kaluan edhe pesë vite të tjera për t'u kënaqur me lindjen e djalit,
Të cilin fati i keq e deshi që të jetojë vetëm sa gjysma e viteve të të atit me renome botore,
Në dhembje të thellë për të birin, vdiq 4 vite pas tij"
Mësimdhënësi demonstron se si duhet të zbatohen në detyrën e mësipërme 6 hapat për shkrimin dhe zgjidhjen e ekuacioneve.

Hapi I: E panjohura x - shënon numrin e viteve që ka jetuar Diofanti.

Hapi II: Periudhat e jetës mund të vizatohen në bosht.

Hapi III: Ndërtojmë shprehjen: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$

Hapi IV: Shtrojmë ekuacionin: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$

Hapi V: Zgjidhim ekuacionin dhe gjejmë zgjidhjen: $x=84$

Hapi VI: Bëjmë provën: $\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}+5+\frac{84}{2}+4=84$ $\qquad 84=84$

Mësimdhënësi i këshillon nxënësit që në rastin e formulimit të ekuacioneve të kenë shumë kujdes në leximin e detyrës dhe në kuptimin e të dhënave në të. Kuptimi i detyrës është çelës në formulimin e saktë të ekuacionit, zgjidhja e të cilit pastaj është detyrë teknike.

Mësimdhënësi ka përgatitur 4 detyra dhe kërkon që secili nga grupet të zgjidhë njërën nga to:

Detyra 1: Udhëtari i drejtohet bariut që ruante delet me këto fjalë: "O bari me njëqind dele." Bariu ia ktheu: "Nuk janë njëqind, por sikur të ishin edhe kaq, edhe sa gjysma e tyre, edhe sa çereku i tyre dhe unë do të bënim njëqind". Sa dele ka bariu?

Detyra 2. Nëna vendosi mbi tryezë një pjatë me arra. Djali mori nga pjata një të tretën e arrave, vajza mori një të tretën e atyre që mbetën. Njëjtë veproi dhe babai duke marrë një të tretën e atyre që mbetën. Nënës i mbetën 8 arrat e fundit. Sa arra kishte në fillim?

Detyra 3. Zana bleu tre libra për 43 euro. Sa kushtuan librat, nëse dihet se libri i dytë kushtoi 5 euro më shumë se i pari, ndërsa i treti sa dyfishi i të dytit?

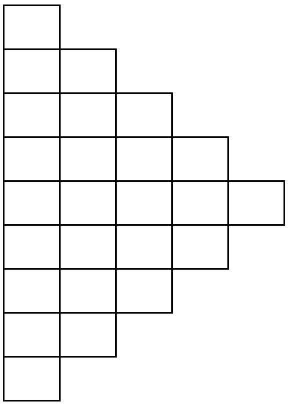
Detyra 4. Babai është 9 herë më i vjetër se i biri. Pas 9 viteve ai do të jetë 3 herë më i vjetër se i biri. Sa vjeç është babai?

Mësimdhënësi vëzhgon punën e grupeve dhe ofron ndihmë në rast nevoje. Nga një përfaqësues i secilit grup do të shënojë zgjidhjen e detyrës në tabelë.

Reflektimi – 10 min

Nxënësit në mënyrë individuale do të zgjidhin detyrën: Çmimi i një laptopi është 450 euro. Sa duhet të paguajë Arta nëse për blerjen e laptopit ka 15% zbritje?
Zgjidhja e detyrës diskutohet në grup. Nëse ndonjë nxënës ka zgjidhur detyrën gabim, atëherë anëtarët e grupit e ndihmojnë atë. Një nxënës shënon zgjidhjen e detyrës në tabelë.

Mësimdhënësi shpërndan për secilin nxënës nga një fjalëkryq si më poshtë dhe kërkon nga nxënësit ta plotësojnë atë:



1. Shenja element
2. Posedon
3. Vendkalimi mbi lumë
4. Pjesa më e imtë e materies
5. Një e qindta pjesë e euros (shq.)
6. Mëri
7. Objekt për matjen e kohës
8. "Jo" në gjuhën angleze
9. Simboli për intensitetin e rrymës.

Nxënësi që plotëson më së shpejti fjalëkryqin e lexon shtyllën e parë, e cila përmban fjalën "Ekuacioni".
Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrat 5 dhe 10 në faqen 127 të tekstit shkollor. Nxënësit e talentuar duhet të formulojnë një detyrë nga jeta praktike, e cila mund të shkruhet si ekuacion dhe ta zgjidhin atë.

Reflektimi nga përvoja: Përkthimi i detyrave problemore në shprehje algjebrike dhe ekuacione është sfiduese për nxënësit, prandaj mësimdhënësi duhet të ketë kujdes që t'i këshillojë nxënësit që të kuptojnë se çka kërkohet në detyrë në mënyrë që ta identifikojnë atë me njërën nga ndryshoret x, y, etj. Më tutje, ai/ajo duhet të këshillojë nxënësit që të bëjnë dallimin ndërmjet kuptimeve "... është më e madhe për 2 ..." nga rasti kur "... është dyfishi i ...". Ngjashëm në rastet "është më e vogël për 2 ..." nga rasti "... është gjysma e ...". Gjithashtu ai/ajo duhet të këshillojë nxënësit si të shkruajnë shprehjen "... para dy viteve, ai ka qenë dy herë më i vjetër se ..."

Për të inkurajuar nxënësit në zgjidhjen e detyrave të tilla, mësimdhënësi duhet të ketë kujdes në zgjedhjen e shembujve sa më interesantë nga jeta dhe mundësisht në pajtim me interesimet e nxënësve. Shembujt e tillë shtojnë motivimin e brendshëm të nxënësve, i cili është element thelbësor në perceptimin e procesit mësimor nga ana e nxënësve si diçka interesante që është në pajtim me interesimet e tyre dhe jo si një proces imponues.

Klasa: VIII

Njësia mësimore: Këndi qendror dhe periferik

Fjalët kyçe: Kënd qendror, kënd periferik, kordë.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, vizorja, kompasi, këndmatësi, gërshërët, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- dallojnë këndin qendror dhe atë periferik,
- krahasojnë këndin qendror me atë periferik mbi të njëjtën kordë që gjenden nga njëra anë e kordës,
- tregojnë se këndet periferike mbi të njëjtën kordë nga ana e njëjtë e kordës janë të barabarta,
- vërtetojnë se këndi periferik mbi diametër të rrethit është kënd i drejtë.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 5 min

Mësimdhënësi paraqet një material nga uebfaqja **http://www.mathopenref.com/arccentralangletheorem.html**. Ai/ajo sqaron konceptin e këndit qendror dhe periferik mbi të njëjtën kordë dhe lëvizë pikën ngjyrë portokalli P. Ai/ajo kërkon nga nxënësit që të formulojnë dy hipoteza në lidhje me raportin e këndit qendror dhe atij periferik mbi të njëjtën kordë, si dhe atë që ka të bëjë me karakteristikën e përbashkët të të gjitha këndeve periferike mbi të njëjtën kordë, të cilat janë nga njëra anë e saj. Si rezultat mund të formulohen dy hipoteza:

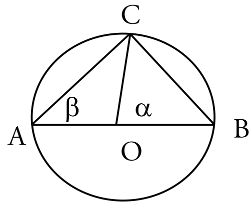
1. Këndi qendror ∠AOB është gjithmonë sa dyfishi i këndit periferik ∠APB.
2. Këndet periferike mbi të njëjtën kordë të cilat janë nga njëra anë e saj janë kongruente.

Realizimi i kuptimit - 30 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të kujtojnë dy rregulla të mësuara më parë:
Çfarë mund të thuhet për këndet mbi bazën e trekëndëshit barakrahësh?

- Çfarë raporti ekziston në mes të këndit të jashtëm në një trekëndësh dhe shumës së këndeve të brendshme jo fqinjë me të?

Pas rikujtimit të rregullave, nga nxënësit kërkohet të realizojnë aktivitetin e parë:



- Të vizatojnë një rreth me qendër në pikën O dhe të caktojnë në të pikat A, B dhe C ashtu që AB të jetë diametër i rrethit.
- Të shënojnë me α këndin qendror mbi kordën BC dhe me β këndin periferik ∠BAC.
- Të konstatojnë se me cilin kënd është i barabartë këndi ∠ACO duke ditur se ΔAOC është trekëndësh barakrahësh (OA=OC).
- Të konstatojnë se me çfarë është i barabartë këndi α duke ditur se ai është kënd i jashtëm për trekëndëshin ΔAOC.

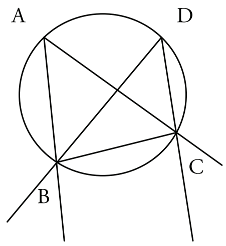
Nxënësit arrijnë në përfundimin se $\alpha = 2\beta$.
Meqë aktiviteti i mësipërm paraqet rastin special ku AB është diametër i rrethit, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të punojnë në grup dhe të kryejnë aktivitetin e dytë:

- Të vizatojnë një rreth dhe të caktojnë 3 pika A, B dhe C, ashtu që kordat AB dhe AC të mos e përmbajnë qendrën O të rrethit, si dhe pika A të jetë në të njëtën anë të kordës BC kah gjindet qendra e rrethit.
- Të shënojnë me α këndin qendror mbi kordën BC dhe me β këndin periferik të ndërtuar mbi kordën BC, pra këndin $\angle BAC$.
- Të vizatojnë diametrin me kulm në pikën A dhe të shënojnë me D pikën tjetër të diametrit.
- Të vizatojnë segmentet DB dhe DC, si dhe të shënojnë me θ dhe ω këndin qendror dhe periferik mbi kordën DB dhe me γ dhe ρ këndin qendror dhe periferik mbi kordën DC.
- Duke pasur parasysh aktivitetin e parë, çfarë mund të thuhet për këndet θ dhe ω, si dhe këndet γ dhe ρ ?

Nxënësit arrijnë në përfundimin se $\theta = 2\omega$ dhe $\gamma = 2\rho$. Gjithashtu relacionet $\theta = \alpha + \gamma$ dhe $\omega = \beta + \rho$ janë triviale. Mësimdhënësi ndihmon një nxënës për të zëvendësuar ekuacionet e dyta në ekuacionin e parë. Si rezultat fitohet ekuacioni $\alpha = 2\beta$, i cili vërteton hipotezën e parë.
Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grup të gjejnë përgjigjen e pyetjes:

- Sa është masa e këndit periferik të ndërtuar mbi diametër të rrethit?

Një nxënës do të përgjigjet dhe do të shënojë zgjidhjen në tabelë.



Reflektimi - 10 min

Aktiviteti i tretë: Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grup:

- Të vizatojnë një rreth dhe të caktojnë në të 4 pika A, B, C dhe D, ashtu që A dhe D të jenë nga njëra anë e harkut të ndërtuar mbi kordën BC.
- Të vizatojnë këndin qendror mbi kordën BC, si dhe këndet periferike mbi këtë kordë me kulme në pikat A përkatësisht D.
- Të masin me këndmatës këndet periferike te kulmi A dhe D.
- Duke zbatuar rregullën për raportin ndërmjet këndit qendror dhe periferik, të konstatojnë raportin që ekziston ndërmjet këndeve periferike mbi të njëjtën kordë që gjenden nga njëra anë e kordës BC.
- Çka mund të thuhet për hipotezën e dytë?

Në fund, mësimdhënësi kontrollon arritjen e rezultateve të të nxënit dhe i këshillon nxënësit:

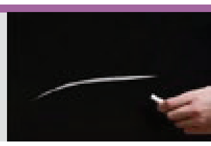
Mbani në mend:

Këndi qendror është sa dyfishi i këndit periferik të ndërtuar mbi të njëjtën kordë. Këndet periferike mbi të njëjtën kordë që gjenden nga njëra anë e saj janë kongruente. Këndi periferik mbi cilindo diametër të rrethit është kënd i drejtë.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrën 1 në faqen 141 të tekstit shkollor.
Reflektimi nga përvoja: Aktivitetet e planifikuara kanë për qëllim përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Nxënësit me vështirësi në të nxënë mund të zhvillojnë aktivitetet praktike, ndërsa të talentuarit kanë mundësi të formulojnë rregullat dhe të nxjerrin konstatimet.
Formulimi i hipotezave përmes realizimit të aktiviteteve praktike ka shumë përparësi, disa prej të cilave janë:

- Nxënësit kanë mundësi të formulojnë rregullat me gjuhën e tyre dhe jo t'i mësojnë përmendësh ashtu siç janë shkruar në libra. Kjo u ndihmon nxënësve që rregullat t'i mbajnë në mend për një kohë më të gjatë.
- Vizualizimi ndihmon të kuptuarit dhe qëndrueshmërinë e informacionit për një kohë më të gjatë.
- Nxënësit kanë rast të ndërtojnë njohuritë e tyre duke përdorur qasjen induktive, e cila shpeshherë i orienton ata drejt vërtetimit deduktiv të rregullave.
- Përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor.

Vërtetimi i hipotezave përmes aktiviteteve praktike dhe zbatimit të rregullave të mësuara më herët është proces shumë i rëndësishëm, sepse ndihmon nxënësit që në mënyrë të pavarur të arrijnë te konkluzionet. Zbatimi i paranjohurive gjatë analizës së rasteve të reja synon të ndihmojë nxënësit në ndërtimin e vazhdueshëm të dijeve të tyre. Një qasje e tillë i përgatitë nxënësit si hulumtues të rinj, të cilët mund ta përdorin këtë model jo vetëm në matematikë, por edhe në hulumtimin e njohurive në fushat e tjera lëndore.



Klasa: IX

Njësia mësimore: Kongruenca e trekëndëshave (2 orë, 90 minuta)

Fjalët kyçe: BBB, BKB, KBK, BBK, kongruencë, lartësi, ortoqendër.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, vizorja, kompasi, këndmatësi, gërshërët, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- artikulojnë 4 rregullat për kongruencën e trekëndëshave
- zbatojnë rregullat për kongruencën e trekëndëshave në zgjidhjen e detyrave të ndryshme.

Zhvillimi i mësimit

Meqë njësia mësimore përmban shumë informacione, të cilat nuk mund të përmblidhen brenda një ore mësimore, atëherë është planifikuar që ajo të zhvillohet në dy orë mësimore.

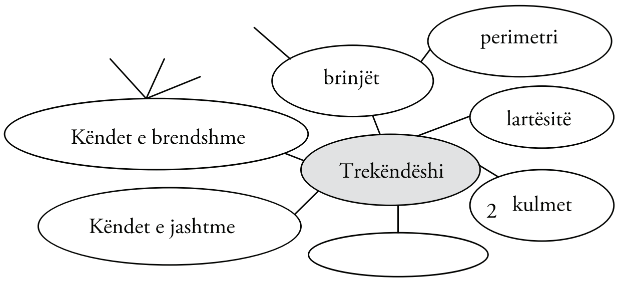
Struktura e orës së parë:

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi shënon në qendër të tabelës fjalën "Trekëndëshi" dhe kërkon që nxënësit ta plotësojnë hartën e konceptit (kllasterin) me njohuritë që kanë për trekëndëshin dhe elementet e tij.

Realizimi i kuptimit - 20 min

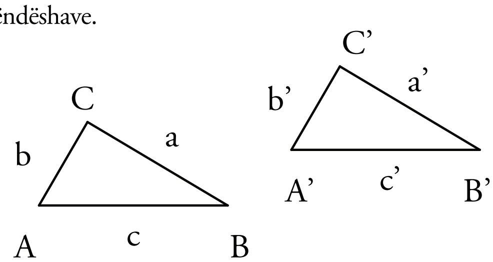
Mësimdhënësi shpërndan nga një zarf për secilin grup. Në zarf janë 2 fletë, secila prej tyre ka dy trekëndësha me të dhënat e duhura për të demonstruar 2 nga 4 rregullat e kongruencës së trekëndëshave.



Aktiviteti i parë (Rregulla BBB): Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grup:

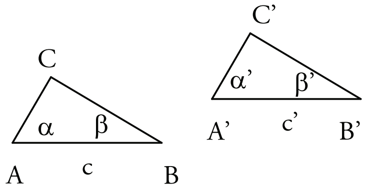
- Të zgjedhin fletën me numër 1.
- Të matin me kompas brinjët përkatëse të trekëndëshave.
- Të tregojnë se çfarë konstatuan.
- Të presin me gërshërë njërin trekëndësh dhe ta vendosin mbi trekëndëshin tjetër duke përputhur kulmet përkatëse.
- Të konstatojnë se çfarë fituan.
- Të artikulojnë rregullën e parë të kongruencës së dy trekëndëshave.

Një nxënës e thotë rregullën para të gjithë nxënësve të tjerë. Mësimdhënësi demonstron para nxënësve rregullën e parë të kongruencës së trekëndëshave (BBB) përmes internetit **http://www.mathopenref.com/congruentsss.html .**



Aktiviteti i dytë(Rregulla KBK): Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në grup:

- Të zgjedhin fletën me numër 2.
- Të matin me kompas brinjët përkatëse të trekëndëshave, c dhe c'.
- Të matin këndet që shtrihen mbi brinjën e dhënë me këndet përkatëse të trekëndëshit tjetër.
- Të tregojnë se çfarë konstatuan.
- Të presin me gërshërë njërin trekëndësh dhe ta vendosin mbi trekëndëshin tjetër duke përputhur kulmet përkatëse.
- Të konstatojnë se çfarë fituan.
- Të artikulojnë rregullën e dytë të kongruencës së dy trekëndëshave.



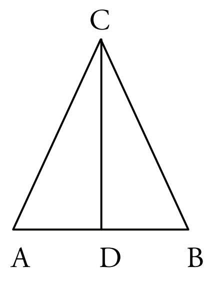
Një nxënës e thotë rregullën para të gjithë nxënësve të tjerë. Mësimdhënësi demonstron para nxënësve rregullën e dytë të kongruencës së trekëndëshave (KBK) përmes internetit **http://www.mathopenref.com/congruentasa.html.**

Reflektimi 15 min

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të rikujtojnë përkufizimin e lartësisë së trekëndëshit dhe të simetrales së këndit të brendshëm të tij. Ai/ajo më pas sqaron nocionin e medianës së trekëndëshit dhe e ilustron atë në një trekëndësh. Mësimdhënësi sqaron se rregullat për kongruencën e trekëndëshave kanë rëndësi shumë të madhe në matematikë, sepse përmes zbatimit të tyre arrihet vërtetimi i shumë pohimeve në gjeometri. Mënyrën e zbatimit të rregullës së parë (BBB) në vërtetimin e pohimeve, mësimdhënësi e sqaron duke bashkëpunuar me nxënësit në vërtetimin e pohimit:

Pohim: Mediana e cila i përgjigjet bazës së trekëndëshit barakrahësh njëkohësisht paraqet lartësinë e tij të lëshuar mbi bazë dhe simetralen e këndit përballë bazës.
Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të konstruktojnë një trekëndësh barakrahësh, dhe të vizatojnë medianën nga kulmi C. Ai/ajo kërkon që nxënësit të zbatojnë rregullën e parë të kongruencës së trekëndëshave (BBB) në trekëndëshat ΔADC dhe Δ BDC. Më pas pyet nxënësit:

- Çfarë mund të thuhet për trekëndëshat ΔADC dhe Δ BDC?
- Çfarë mund të thuhet për këndin te kulmi D në të dy trekëndëshat ΔADC dhe Δ BDC?
- Meqë këndet te kulmi D janë të përbrinjshëm, a mund të themi se CD është lartësi e trekëndëshit?
- Pse CD është edhe simetrale e këndit te kulmi C?



Në fund mësimdhënësi kërkon që nxënësit të rikujtojnë dy rregullat për kongruencën e trekëndëshave.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin këto detyra:
Detyra 1: Vizatoni një trekëndësh çfarëdo dhe lartësitë e tij. Çfarë mund të konstatohet?
Detyra 2: Vizatoni një trekëndësh çfarëdo dhe medianat e tij. Çfarë mund të konstatohet?

Struktura e orës së dytë:

Evokimi - 5 min

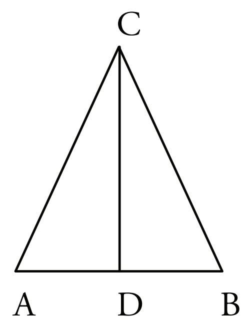
Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të rikujtojnë dy rregullat e para për kongruencën e trekëndëshave. Ai/ajo po ashtu kërkon që nxënësit të tregojnë se çfarë kanë konstatuar me rastin e zgjidhjes së detyrave të shtëpisë. Pra,

- Çfarë mund të themi lidhur me prerjen e lartësive të një trekëndëshi?
- Çfarë mund të themi lidhur me prerjen e medianave të një trekëndëshi?

Mësimdhënësi jep përkufizimin e ortoqendrës dhe pikës së rëndimit.

Realizimi i kuptimit - 25 min

Ngjashëm, si në orën e kaluar, mësimdhënësi ka përgatitur nga një zarf për secilin grup. Në zarf janë 2 fletë, secila prej tyre ka dy trekëndësha me të dhënat e duhura për të demonstruar 2 rregullat e fundit të kongruencës së trekëndëshave. Për të demonstruar këto rregulla nxënësit realizojnë aktivitetet si në orën e mëparshme. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të punojnë në grup dhe duke zbatuar rregullat për kongruencën e trekëndëshave të vërtetojnë pohimin:

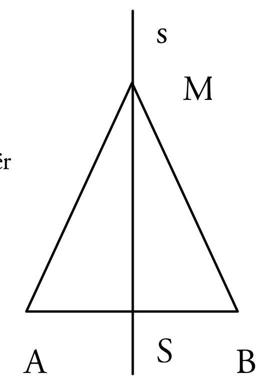


Pohim: Në çdo trekëndësh barakrahësh përballë brinjëve kongruente ndodhen këndet kongruente dhe anasjelltas.
Për të vërtetuar pjesën e parë të pohimit nxënësit udhëzohen që të vizatojnë një trekëndësh barakrahësh, të vizatojnë në të medianën nga kulmi përballë bazës dhe të zbatojnë rregullën e parë (BBB) në trekëndëshat ΔADC dhe ΔBDC.

Për të vërtetuar pohimin e anasjelltë, nxënësit duhet që në vërtetimin e mësipërm CD ta marrin si lartësi të trekëndëshit. Pohimi është i qartë nga zbatimi i rregullës së katërt (BBK) në trekëndëshat ΔADC dhe ΔBDC.

Reflektimi – 15 min

Kërkohet që nxënësit të shfrytëzojnë rregullat për kongruencën e trekëndëshave dhe në grup të zgjidhin detyrën e mëposhtme:



Detyrë: Nëse M është pikë e simetrales s së segmentit AB, atëherë tregoni se $AM \cong BM$.
Shqyrtoni dy rastet kur M i takon segmentit AB dhe kur nuk i takon atij.
Një nxënës do të shënojë zgjidhjen në tabelë.

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit në mënyrë individuale të shënojnë një pesëvargësh për trekëndëshin:

Trekëndëshi
barakrahësh barabrinjës
vizatohet konstruktohet emërtohet
Ekzistojnë katër rregulla për kongruencën e trekëndëshave.
Trekëndori.

Disa nxënës lexojnë punimet e tyre. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përsërisin 4 rregullat për kongruencën e dy trekëndëshave dhe i këshillon ata që t'i mbajnë në mend ato. Një gjë e tillë e ndihmon mësimdhënësin në vlerësimin e arritjes së rezultateve të të nxënit.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin këtë detyrë:
Detyrë. Duke zbatuar rregullat për kongruencën e dy trekëndëshave, tregoni se të gjitha këndet e brendshme në trekëndëshin barabrinjës janë 60°.

Reflektimi nga përvoja: Njësia mësimore është e ngarkuar, prandaj këshillohet që ajo të realizohet të paktën gjatë dy orëve mësimore, në mënyrë që secilës prej rregullave t'i kushtohet koha e mjaftueshme për t'u përvetësuar mirë nga ana e nxënësve. Një mundësi është që mësimdhënësi në orën e parë të shtjellojë së bashku me nxënësit 2 rregullat e para dhe të tregojë mënyrën e zbatimit të rregullave në vërtetimin e pohimeve të ndryshme, ndërsa dy rregullat e tjera t'i realizojë në orën e dytë.

Ndarja e njësisë në dy orë mësimore ofron mundësinë që një pjesë e materialit që duhet të sqarohet në klasë të jepet për t'u realizuar si detyrë shtëpie nga nxënësit, si p.sh. aktivitetet rreth prerjes së lartësive dhe medianave të trekëndëshit. Kjo ofron mundësinë që koha për shtjellimin e temës të shfrytëzohet në mënyrë racionale duke i lejuar mundësinë mësimdhënësit që përveç shtjellimit të rregullave të kongruencës së trekëndëshave të koncentrohet në aftësimin e nxënësve për t'i zbatuar ato në zgjidhjen e detyrave dhe vërtetimin e pohimeve të ndryshme. Aftësimi i nxënësve për të zbatuar rregullat e kongruencës së trekëndëshave është shumë i rëndësishëm, sepse shkathtësitë që fitohen mund të përdoren edhe me rastin e zbatimit të rregullave të tjera në gjeometri, si p.sh. rregullat për ngjashmërinë e trekëndëshave, etj.

Meqë rregullat për kongruencën e trekëndëshave janë të rëndësishme në matematikë është mirë që mësimdhënësi të mos imponojë memorizimin e tyre, por të përdorë mënyra efikase për të nxënit e tyre, si p.sh. artikulimin e rregullave si rezultat të aktiviteteve praktike. Për të arritur këtë synim, në kuadër të kësaj njësie mësimore janë planifikuar aktivitetet, të cilat mund të realizohen edhe nga nxënësit që kanë vështirësi në të nxënë, të cilët me pak ndihmë nga bashkëmoshatarët mund edhe t'i formulojnë ato. Formulimi i rregullave nga vetë nxënësit është me rëndësi, sepse ajo i kontribuon ndërtimit të qëndrueshëm të njohurive, ndërsa vizualizimi i tyre është një element shtesë në lehtësimin e kuptimit të tyre dhe mbajtjen në mend.

Mësimdhënësit duhet të theksojnë para nxënësve nevojën për t'i mësuar këto rregulla në mënyrë që ata të jenë të aftë t'i zbatojnë ato sa herë që të kërkohet në të ardhmen. Pas përsëritjes së rregullave, hartimi i një pesëvargëshi për trekëndëshin është një aktivitet interesant, i cili sadopak i kontribuon integrimit të matematikës dhe fushës së komunikimit.

Klasa: IX

Njësia mësimore: Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve racionale

Fjalët kyçe: Shumëfishi më i vogël i përbashkët - SHMVP.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, fleta A4, etj.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- mbledhin dhe zbresin shprehje racionale të cilat kanë emërues të njëjtë dhe ato që nuk kanë emërues të njëjtë.
- gjejnë SHMVP për dy ose më shumë polinome.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min

Nxënësit janë organizuar në grupe me nga 4 anëtarë. Kërkohet që secili anëtar i grupit të zgjidhë njërën nga detyrat e mëposhtme:

a) $\frac{3}{5}+1\frac{1}{5}=$ ______ ; b) $\frac{3}{5}-1\frac{1}{5}=$ ______ ; c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=$ ______ , ç) $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=$ ______ .

Katër nxënës do të zgjidhin detyrat në tabelë. Nxënësi që do të zgjidhë detyrën e tretë do të sqarojë për nxënësit mënyrën e gjetjes së SHMVP për numrat 4 dhe 6 përmes zbërthimit të tyre, pra:

$4=2^2$ dhe $6=2\cdot 3$, prandaj shmvp $(4,6)=2^2\cdot 3=12$.

Realizimi i kuptimit – 20 min

Kërkohet që nxënësit në mënyrë individuale të zbatojnë rregullën për mbledhjen dhe zbritjen e numrave racionalë me emërues të njëjtë në zgjidhjen e këtyre detyrave:

a) $\frac{x-2}{3}+\frac{3x-1}{3}=$ ___ ; b) $\frac{2x+1}{x-3}+\frac{x+2}{x-3}=$ ____ $, x\neq 3$; c) $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x-3}{x+2}=$ ____ $, x\neq -2$.

Zgjidhjet e gjetura do të diskutohen brenda grupit. Nëse ndonjë nxënës nuk i ka zgjidhjet e sakta, atëherë do t'i korrigjojë detyrat me ndihmën e anëtarëve të grupit. Një nxënës do të formulojë rregullën për njehsimin e mbledhjes dhe zbritjes së shprehjeve racionale me emërues të njëjtë.

Mësimdhënësi shënon në tabelë shprehjet: $2x-6,\ \ x^2-9,\ x^2-6x+9$ dhe sqaron para nxënësve mënyrën e gjetjes së shmvp të shprehjeve të dhëna, duke krijuar analogji me gjetjen e shmvp së numrave. Pra,

$$2x-6=2(x-3)$$

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

Prej nga fitohet se shmvp $(2x-6,\ x^2-9,\ x^2-6x+9)=2(x+3)\cdot(x-3)^2$.

Mësimdhënësi tregon se për gjetjen e shmvp ka rëndësi të madhe zbërthimi i polinomeve në faktorë që është mësuar më herët. Ai/ajo kërkon që nxënësit të mbajnë në mend:

> SHMVP i dy apo më shumë polinomeve përbëhet nga prodhimi i të gjithë faktorëve të ndryshëm të polinomeve, secili prej tyre i ngritur në shkallën më të lartë në të cilën është paraqitur në ndonjërin nga faktorët e polinomeve të dhëna.

Nxënësit në grupe do të zgjidhin dy detyrat e mëposhtme:

a) $\frac{x}{x+1}+\frac{x-3}{x^2-1}=$ ______, $x\neq \pm 1$; b) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}=$ ______, $x\neq \pm 1$.

Dy nxënës do të paraqesin zgjidhjet në tabelë. Një nxënës do të formulojë rregullat për njehsimin e mbledhjes dhe zbritjes së shprehjeve racionale me emërues të ndryshëm.

Reflektimi – 15 min

Mësimdhënësi ka përgatitur nga një fletë për secilin nxënës si më poshtë. Nxënësit do të fillojnë të plotësojnë tabelat në klasë dhe do të vazhdojnë plotësimin e tyre në shtëpi.

+	$\frac{2x}{3}$	$\frac{x-1}{6}$	$\frac{3}{x}$
$\frac{x}{3}$			
$\frac{3}{2(x-1)}$			

-	$\frac{2x}{3}$	$\frac{x-1}{6}$	$\frac{3}{x}$
$\frac{x}{3}$			
$\frac{3}{2(x-1)}$			

$$x\neq 0; 1.$$

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të vazhdojnë plotësimin e tabelave të mësipërme. Po ashtu nxënësit do të shoqërojnë me anën e shigjetave mbledhjen dhe zbritjen e shprehjeve racionale me rezultatet e tyre për $x\notin \{-5,-2,1,2\}$

$\boxed{\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{6}=}$ $\boxed{\frac{3}{4(1-x)}}$ $\boxed{\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{3}=}$ $\boxed{\frac{3x+11}{(x+5)^2}}$

$\boxed{\frac{1}{2(x-1)}-\frac{5}{4(x-1)}=}$

$\boxed{\frac{3}{x+5}-\frac{4}{x^2+10x+25}=}$ $\boxed{\frac{7x-6}{x^2-4}}$ $\boxed{\frac{x+5}{6}}$ $\boxed{\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+2}=}$ $\boxed{\frac{x-1}{2}}$

Nxënësit e talentuar do të zgjidhin detyrën:

$$\frac{8}{x-2}+\frac{3}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x-3}=\_\_\_\_\_\_,\ x\neq 2;\ 3.$$

Reflektimi nga përvoja: Për të lehtësuar kuptimin e mbledhjes dhe zbritjes së shprehjeve racionale, mësimdhënësi duhet të shfrytëzojë analogjinë që ekziston në mes të mbledhjes dhe zbritjes së këtyre shprehjeve dhe kryerjes së veprimeve të njëjta me numra racionalë. Prandaj, është mirë që mësimdhënësi të fillojë këtë njësi mësimore me ushtrime lidhur me mbledhjen dhe zbritjen e numrave racionalë dhe pastaj të përparojë gradualisht me zbatimin e rregullave të tilla në mbledhjen dhe zbritjen e shprehjeve racionale. Mësimdhënësi duhet të ketë kujdes dhe të këshillojë nxënësit se si të bëjnë zbritjen e shprehjeve racionale kur numëruesi i shprehjes së dytë është i përbërë nga dy ose më shumë anëtarë. Po ashtu, mësimdhënësi duhet të sqarojë rëndësinë e faktorizimit dhe zbërthimit të shprehjeve racionale që janë mësuar më parë si elemente të rëndësishme për mbledhjen dhe zbritjen e shprehjeve racionale.

Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve racionale është realizuar duke zbatuar rregullat e mbledhjes dhe zbritjes së numrave racionalë, prandaj në procesin mësimor mund të përfshihen të gjithë nxënësit. Ata që kanë vështirësi në të nxënë mund të kryejnë mbledhjen e numrave racionalë dhe mbledhjen e disa shprehjeve racionale të lehta, ndërsa nxënësit e talentuar mund të sfidohen në zgjidhjen e detyrave lidhur me zbritjen e shprehjeve racionale, si dhe në ato që kërkojnë faktorizimin dhe zbërthimin e shprehjeve racionale në faktorë për të gjetur shmvp e tyre.

Aktivitetet e planifikuara mundësojnë kryesisht zhvillimin e kompetencës së të menduarit përmes zbatimit të rregullave të mësuara për mbledhjen dhe zbritjen e numrave racionalë në njehsimin e shumës dhe ndryshimit të shprehjeve racionale, si dhe kompetencës së të nxënit gjatë gjetjes së shmvp për dy ose më shumë polinome.

Klasa: IX

Njësia mësimore: Zbatime të ngjashmërisë së trekëndëshave

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- zbatojnë rregullat për ngjashmërinë e trekëndëshave në zgjidhjen e detyrave të ndryshme nga gjeometria dhe jeta e përditshme.

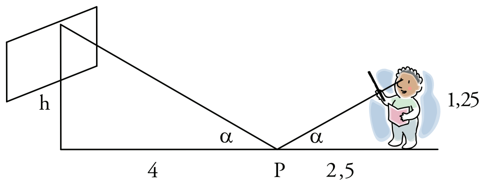
Fjalët kyçe: Ngjashmëria e trekëndëshave, brinjë (segmente) proporcionale.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve,tabela, fletë A4, një metër, një pasqyrë, etj.

Zhvillimi i mësimit

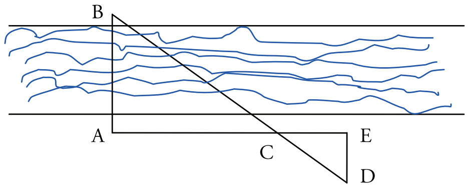
Evokimi - 5 min

Katër nxënës rikujtojnë nga një rregull për ngjashmërinë e trekëndëshave, të mësuara në orët e mëparshme. Mësimdhënësi kërkon nga nxënësit të paraqesin ndonjë informacion që ata kanë mundur të gjejnë nga burime të ndryshme. Më pas, ai/ajo paraqet para nxënësve materialin nga ueb-faqja **http://www.mathopenref.com/similartriangles.html.**

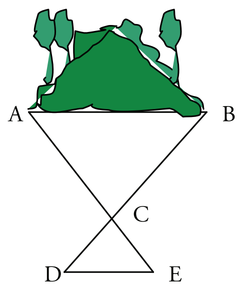
Realizmi i kuptimit - 30 min



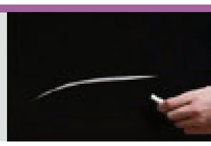
Mësimdhënësi vendos një pasqyrë në dysheme në largësinë 4 m nga muri ku është vendosur tabela dhe kërkon që një nxënës të shkojë përtej pasqyrës dhe të lëvizë derisa duke qëndruar drejt arrin të shohë skajin e sipërm të tabelës në pasqyrë. Më pas një nxënës do të matë largësinë e pasqyrës nga nxënësi p.sh. 2,5 m. Mësimdhënësi tregon se gjatë reflektimit në pasqyrë formohen kënde kongruente te drejtëza e reflektimit. Ai/ajo kërkon që nxënësit në grup të gjejnë lartësinë e tabelës nga dyshemeja deri te skaji i saj i sipërm, nëse dihet se gjatësia e nxënësit deri te syri i tij është 1,25 m.



Nxënësit duhet ta skicojnë problemin e dhënë, ta zgjidhin atë dhe të tregojnë se cilën rregull të ngjashmërisë së trekëndëshave e kanë përdorur. Grupi që ka zgjidhë detyrën më së shpejti do të fitojë të drejtën ta demonstrojë zgjidhjen në tabelë pasi që të përfundojnë detyrën të gjitha grupet e tjera.
Kërkohet që nxënësit në grupe të zgjidhin detyrën e dytë.



Detyra 2. Disa banorë të një fshati dëshirojnë të ndërtojnë urën mbi lumin që kalon në fshatin e tyre. Sa metra e gjatë duhet të jetë ura, nëse banorët kanë arritur të bëjnë këto matje AC=6m, CE=1,6m, DE=1,2m.
Grupi që zgjidhë detyrën më shpejtë do ta paraqesë atë para të tjerëve.
Detyra 3. Një kompani ndërtimore duhet të hapë një tunel nga pika A në pikën B. Kompania ka realizuar matje e këtyre largësive në terren, AC=1500m, BC=1850m,

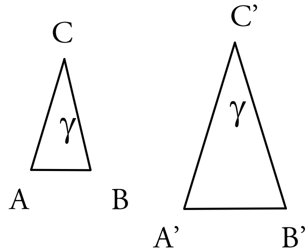


CD = 740m, CE = 600 m. Sa do të jetë i gjatë tuneli, nëse DE=800m?
Nxënësit do të vizatojnë skicën, do të zgjidhin detyrën dhe do të tregojnë se cilën rregull të ngjashmërisë së trekëndëshave e kanë zbatuar. Grupi më i shpejtë prezanton detyrën.
Detyra 4. Të tregohet se dy trekëndësha barakrahësh janë të ngjashëm, nëse këndet përkatëse ndërmjet krahëve të tyre janë kongruentë. Ngjashëm si në rastet e tjera, grupi më i shpejtë do të paraqes zgjidhjen dhe do të tregojë cilën rregull të ngjashmërisë e kanë përdorur.

Reflektimi – 10 min

Mësimdhënësi pyet nxënësit:

- Në rastin e përgjithshëm, a janë trekëndëshat kongruentë trekëndësha të ngjashëm? Pse?
- Në rastin e përgjithshëm, a janë trekëndëshat e ngjashëm trekëndësha kongruentë? Pse?



Pas dhënies së përgjigjeve dhe diskutimit të tyre, mësimdhënësi kërkon që nxënësit të shkruajnë një shkrim të shkurtër 5-minutësh me titull:

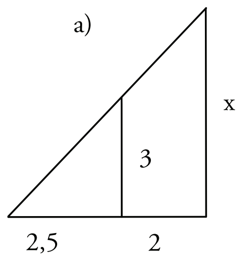
Profesionet në të cilat zbatohet ngjashmëria e trekëndëshave

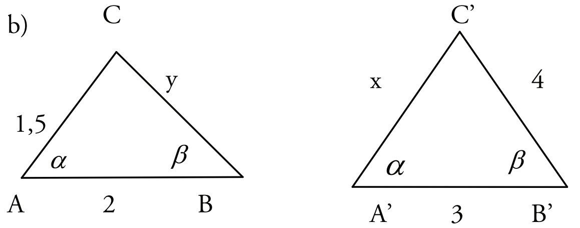
Disa punime të nxënësve do të lexohen në klasë. Në fund mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përsërisin edhe njëherë 4 rregullat për ngjashmërinë e trekëndëshave dhe i këshillon ata që t'i mbajnë në mend ato.

Detyrë shtëpie:

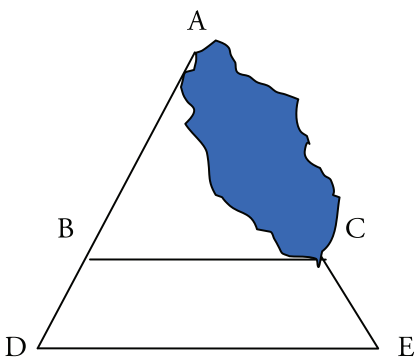
Nxënësit do të gjejnë gjatësitë e kërkuara në figurat e dhëna:
Nxënësit e talentuar do të zgjidhin detyrën e mëposhtme.

Detyrë: Sa është gjatësia AC e liqenit të dhënë në figurë, nëse dihen gjatësitë e segmenteve BC=30m, DE=50m, CE=15m dhe fakti se BC dhe DE janë segmente paralele?





Reflektimi nga përvoja: Ngjashmëria e trekëndëshave ka zbatim të jashtëzakonshëm në zgjidhjen e shumë problemeve nga jeta praktike, siç janë: gjetja e lartësisë së objekteve të ndryshme, njehsimi i gjatësisë së tuneleve që duhet të hapen, njehsimi i gjerësisë së një lumi për të ndërtuar urë mbi të, njehsimi i distancave të ndryshme në artileri, etj., prandaj mësimdhënësi duhet të jetë kreativ dhe të zgjedhë shembuj sa më të larmishëm nga jeta praktike, të cilët janë me interes për nxënësit dhe të cilët zgjojnë kërshërinë e tyre për t'i zgjidhur. Shembujt nga jeta praktike dhe veçanërisht ata të cilët janë të lidhur me profesionet e ndryshme do të influencojnë të nxënit e nxënësve dhe do të shtojnë motivimin e tyre për të nxënë.



Shembujt e tillë i kontribuojnë ndërtimit të përceptimit të nxënësve, se të nxënit e matematikës është njëri ndër parakushtet për të ndërtuar karrierë të suksesshme në shumë profesione në të ardhmen.

Të gjithë shembujt e planifikuar janë nga jeta reale. Gjetja e lartësisë me anën e pasqyrës zgjon interesimin e nxënësve, sepse një shembull i tillë mund të përdoret në situata të ndryshme, si p.sh. gjetjen e lartësisë së një ndërtese, njehsimin e gjatësisë së hijes që lëshojnë objektet e ndryshme, etj. Shembujt për njehsimin e gjatësisë së urës dhe tunelit do të zhvillojnë aftësitë e nxënësve për të zgjidhur probleme në të cilat kërkohet matja e objekteve të ndryshme, të cilat nuk mund të maten në mënyrë direkte. Pas zgjidhjes së detyrave nga jeta praktike, nxënësit me kënaqësi do të përfshihen në procesin e të shkruarit rreth profesioneve të ndryshme në të cilat zbatohet ngjashmëria e trekëndëshave. Kjo përforcon idenë për nevojën e të mësuarit të rregullave të ngjashmërisë së trekëndëshave dhe ofron mundësinë e të shprehurit nga ana e nxënësve.

Shembujt nga jeta praktike dhe shkrimi për profesionet e ndryshme motivojnë nxënësit të jenë aktiv gjatë procesit mësimor. Aktivitetet e planifikuara i kontribuojnë zhvillimit të pothuajse të gjitha kompetencave të nxënësve, si:

- Kompetencës së komunikimit përmes shkrimit të një shkrimi të lirë.
- Komptetencës së të menduarit duke analizuar mundësitë për zgjidhjen e problemeve.
- Kompetencës së të nxënit duke zbatuar rregullat në zgjidhjen e detyrave dhe gjetjen e lidhjes që ekziston ndërmjet dy koncepteve “kongruencës” dhe “ngjashmërisë” së trekëndëshave.
- Kompetencës për jetë dhe punë përmes zgjidhjes së shembujve nga jeta praktike dhe zbatimit të ngjashmërisë së trekëndëshave në profesione të ndryshme.
- Kompetencës së qytetarisë duke kontribuar në punën e grupit.

Klasa: IX

Njësia mësimore: Inekuacionet e formës $|x| > a$

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- zgjidhin inekuacionet e formës $|x| > a$,
- paraqesin në boshtin numerik bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacioneve të formës $|x| > a$.

Fjalët kyçe: Inekuacion, vlerë absolute, bashkësi e zgjidhjeve.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, fleta A4.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min

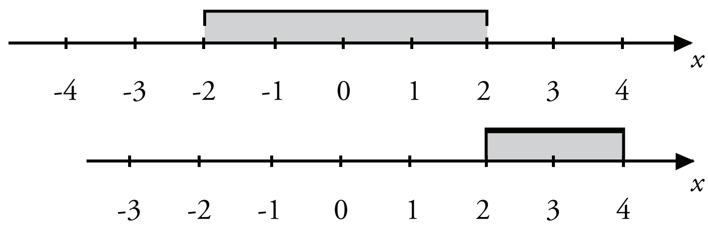
Nxënësit janë organizuar në grupe me nga 4 anëtarë. Secili nga anëtarët e grupit do të zgjidhë njërën nga inekuacionet e mëposhtme dhe aty ku ka mundësi do të paraqes bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik.

Detyra 1. $|x| < 2$

Detyra 2. $2|x-3| \leq -4$

Detyra 3. $|3-x| \leq 1$

Detyra 4. $|x| < -1$



Katër nxënës të grupeve të ndryshme do të zgjidhin detyrat në tabelë. Nxënësit e tjerë do të kontrollojnë zgjidhjet e tyre dhe në rast nevoje do të bëjnë korrigjimet e duhura.

Realizimi i kuptimit – 25 min

Mësimdhënësi pyet nxënësit:

- Çka paraqet vlera absolute e një numri?
- Çka do të thotë të zgjidhësh inekuacionin $|x| < a$?
- Çka mund të thuhet për bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|x| > a$?
- Si paraqitet në boshtin numerik bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit $|x| > a$?

Kërkohet që nxënësit në mënyrë individuale të zgjidhin detyrat e mëposhtme dhe të paraqesin bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik.

a) $|x| > 2$, b) $|x| > 0$, c) $|x| > -2$.

Një nxënës shënon zgjidhjet e detyrave në tabelë. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- Çfarë mund të konstatohet nga shembujt e mësipërm në lidhje me bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|x| > a$ për vlera të ndryshme të a ?
- Çfarë ndodhë me bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacioneve të mësipërme, nëse në vend të shenjës “>” e vendosim shenjën “$\geq$” ?

Mësimdhënësi kërkon nga nxënësit të plotësojnë tabelën e mëposhtme dhe të kontrollojnë rezultatet e tyre brenda grupit.

$\lvert x-1\rvert+4<7$ BASHKËSIA E ZGJIDHJEVE {X∈R| -2<X <4}	$\lvert x-1\rvert+4=7$ BASHKËSIA E ZGJIDHJEVE X =-2 OSE X=4	$\lvert x-1\rvert+4>7$ BASHKËSIA E ZGJIDHJEVE {X∈R | X <-2 OSE X>4}
	$\lvert 1.5-x\rvert-2=-0.5$	
	$\lvert 1-2x\rvert=\frac{1}{2}$	
	$4-\lvert 1-x\rvert=2$	

Disa nxënës shënojnë zgjidhjet në tabelë.
Mësimdhënësi tregon se inekuacionet me vlerë absolute kanë zbatim në zgjidhjen e problemeve në jetën praktike, p.sh. Një kompani për grumbullimin e mollëve në plantacione përgatitë arkat me kapacitet prej 10 kg. Kompania siguron blerësit se çdo arkë mund të ketë gabimin maksimal 1% të masës së përgjithshme. Arkat me çfarë peshe nuk duhet lejuar të dërgohen në shitore?

Mësimdhënësi sqaron shtrimin e këtij problemi në gjuhën algjebrike:

|pesha e arkës – pesha ideale |>0,01 · pesha ideale.

Më pas kërkon që një nxënës të zgjidhë detyrën në tabelë.

$$|x-10|>0{,}01\cdot 10.$$
$$|x-10|>0{,}1.$$
$$x-10<-0{,}1 \text{ ose } x-10>0{,}1$$
$$x<9{,}9 \text{ ose } x>10{,}1$$

Pra, kompania duhet të ndalë për korrigjim arkat që peshojnë nën 9,9 kg dhe ato që peshojnë mbi 10,1 kg.

Reflektimi – 10 min

Nxënësit në mënyrë individuale do të zgjidhin detyrat dhe në fund do të krahasojnë rezultatet brenda grupit:

a) $\lvert -2x+1\rvert-3>5$ b) $\left\lvert 1\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}\right\rvert>\frac{1}{2}$ c) $\lvert 1.66-1.4x\rvert-2.2>1.4$.

Mësimdhënësi kontrollon arritjen e rezultateve të të nxënit dhe i këshillon nxënësit:

Mbani në mend:

Për ndonjë numër real x dhe $a > 0$, $|x| > a$ është ekivalent me $x < -a$ ose $x > a$

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrat nga uebfaqja **http://www.mathworksheets4kids.com/absolute-value/solve-inequality-2.pdf.** Nxënësit e talentuar do të formulojnë një detyrë nga jeta praktike, në të cilën zbatohet inekuacioni me vlerë absolute dhe ta zgjidhin atë.

Reflektimi nga përvoja: Mësimdhënësi duhet të shfrytëzojë analogjinë që ekziston në zgjidhjen e inekuacioneve të formës $|x| < a$ dhe $|x| > a$. Për këtë arsye, njësia mësimore fillon me rikujtimin e zgjidhjes së inekuacioneve $|x| < a$ dhe më pas me zhvillimin gradual të shkathtësive të nxënësve për të zgjidhur inekuacionet e formës $|x| > a$. Mësimdhënësi duhet të theksojë faktin se me rastin e zgjidhjes së inekuacioneve të formës $|x| > a$, nxënësit duhet të kenë kujdes dhe të shënojnë ndaras dy inekuacionet që fitohen $x < -a$, $x > a$ dhe të mos bëjnë gabim duke i shënuar ato në formën $-a > x > a$.

Plotësimi i tabelës ndihmon nxënësit në përforcimin e njohurive për zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve me vlerë absolute, si dhe për të vërejtur dallimin që ekziston në bashkësinë e zgjidhjeve, nëse të njëjtën shprehje me vlerë absolute e bëjmë më të vogël se një numër, pastaj e barazojmë me të njëjtin numër dhe në fund e bëjmë më të madhe se numri i dhënë. Ndërsa, zgjedhja e një shembulli nga jeta praktike motivon nxënësit për të kuptuar më mirë inekuacionet me vlerë absolute, sepse ata e shohin me interes të mësuarit e tyre.

Njësia mësimore bazohet shumë në njohuritë e fituara në orët e kaluara, prandaj është mirë që nxënësit të zgjidhin detyrat në mënyrë individuale e pastaj të krahasojnë rezultatet në grup. Kjo ndihmon mësimdhënësin për të vlerësuar aftësitë e nxënësve në zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve me vlerë absolute. Detyrat e planifikuara synojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Nxënësit me vështirësi në të nxënë mund të zgjidhin disa inekuacione më të lehta, derisa nxënësit e talentuar mund të sfidohen në dhënien e përgjigjeve dhe zgjidhjen e inekuacioneve më të vështira, veçanërisht të atyre që përmbajnë numra racionalë ose numra dhjetorë.

Klasa: IX

Njësia mësimore: Zgjidhja e sistemit të ekuacioneve lineare me dy ndryshore – Metoda e eliminimit

Rezultatet e të nxënit: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- zbatojnë metodën e eliminimit në zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare me dy ndryshore,
- tregojnë procedurën e zgjidhjes së sistemit të ekuacioneve lineare me rastin e zbatimit të metodës së eliminimit.
- diskutojnë zgjidhshmërinë e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy ndryshore.

Fjalët kyçe: Sistem i ekuacioneve lineare me dy ndryshore, metoda e eliminimit.
Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, fleta A4.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 5 min

Kërkohet që nxënësit të provojnë nëse dyshet e renditura (-1,2) dhe (3, -0.5) janë zgjidhje të sistemit të ekuacioneve lineare me dy ndryshore:

$$\left.\begin{aligned}3x-2y&=10\\x+4y&=1\end{aligned}\right\}$$

Mësimdhënësi kërkon që një nxënës të japë përgjigjen e saktë.

Realizimi i kuptimit – 30 min

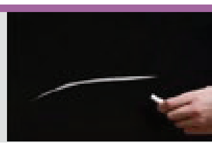
Nxënësit janë të organizuar në grupe me nga 4 anëtarë. Mësimdhënësi sqaron se përveç metodës grafike për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy të panjohura, ekzistojnë dhe metoda të tjera për zgjidhjen e tyre, ndër të cilat është dhe metoda e eliminimit, të cilën nxënësit do ta mësojnë përmes leximit të njësisë mësimore në libër. Kështu, nxënësit me numër 1 do të lexojnë shembullin 1 në libër, nxënësit me numër 2 do të lexojnë shembullin e dytë, e kështu me radhë deri te numri 4. Pas leximit, nxënësit do të fillojnë të sqarojnë shembullin e lexuar për anëtarët e tjerë të grupit. Mësimdhënësi kontrollon punën e grupeve dhe ndihmon ndonjë nxënës në rast nevoje. Katër nxënës do të paraqesin zgjidhjet e shmebujve në tabelë dhe do të sqarojnë natyrën e ndryshme të sistemeve të ekuacioneve lineare me dy të panjohura të dhëna në shembujt 1-4.
Mësimdhënësi kërkon që nxënësit, duke punuar në grup, të shënojnë në formë standarde sistemet e ekuacioneve lineare me dy të panjohura dhe t'i zgjidhin ato:

$$\left.\begin{aligned}5x-3y&=4\\4y-2x&=1\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}2y-3&=4x\\5-x&=-3y+1\end{aligned}\right\}$$

Dy nxënës do të shënojnë zgjidhjet në tabelë.

Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- Si duhet të shkruhet secili ekuacion i sistemit?
- Çfarë duhet të bëjmë, nëse nuk kemi numra të kundërt pranë asnjërës ndryshore?
- Cili hap pason pas fitimit të numrave të kundërt te njëra nga ndryshoret e sistemit?
- Çfarë fitohet pas mbledhjes anë për anë të ekuacioneve të sistemit?



- Çfarë mund të themi për sistemin, nëse me rastin e mbledhjes fitojmë barazi të pasaktë? Po nëse fitojmë identitetin 0=0 ? Po nëse ftojmë ekuacion me një ndryshore?
- Cili hap pason pas fitimit të një ekuacioni linear me një të panjohur?

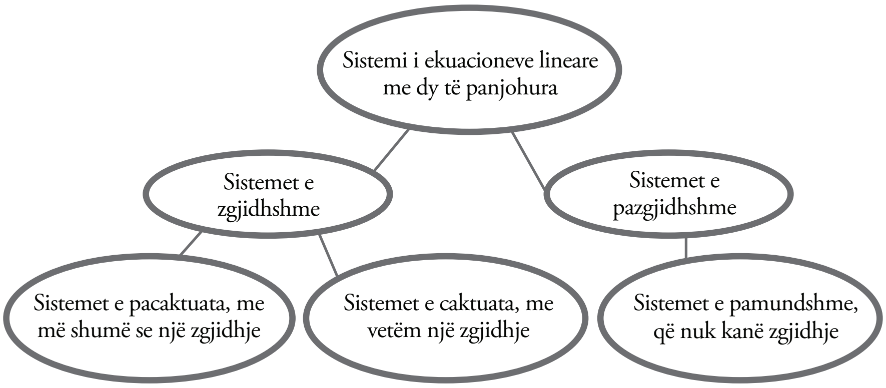
Përgjigjet e nxënësve ndihmojnë mësimdhënësin të sqarojë porocedurën e zgjidhjes së sistemit të ekuacioneve lineare me metodën e eliminimit.

Reflektimi -10 min

Nxënësit do të punojnë në mënyrë individuale për të zgjidhur sistemin e mëposhtëm të ekuacioneve lineare me metodën grafike dhe atë të eliminimit.

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y&=6 \\ 3x+4y&=1 \end{aligned}\right\}$$

Rezultatet do të krahasohen brenda grupit. Mësimdhënësi kërkon që nxënësit të identifikojnë përparësitë e përdorimit të metodës së eliminimit ndaj metodës grafike në zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare.
Në fund, mësimdhënësi së bashku me nxënësit do të shënojnë në tabelë hartën e konceptit (kllasterin) që paraqet zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy të panjohura:

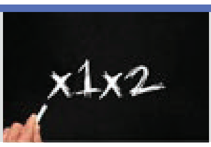


Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrën 2 në faqen 194. Përveç detyrës 2, nxënësit e talentuar do të zgjidhin edhe sistemin e ekuacioneve lineare me dy të panjohura:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y&=1 \\ \frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y&=\frac{1}{12} \end{aligned}\right\}.$$

Reflektimi nga përvoja: Metoda e eliminimit është njëra nga metodat më të përdorshme në zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura, prandaj mësimdhënësi duhet të ketë kujdes që nxënësit ta përvetësojnë mirë këtë metodë. Përmes shembujve të ndryshëm mësimdhënësi duhet të sqarojë zbatimin e kësaj metode në raste të ndryshme, si p.sh. rasti kur nuk ka nevojë të shumëzohet asnjë ekuacion, kur ka nevojë të shumëzohet njëri ekuacion dhe kur ka nevojë të shumëzohen të dy ekuacionet. Po ashtu, përmes shembujve nxënësit duhet të kuptojnë edhe natyrën e zgjidhshmërisë së sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura.

Aktivitetet e planifikuara kanë për qëllim përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Nxënësit me vështirësi në të nxënë aktivizohen gjatë leximit të shembujve dhe paraqitjes së tyre anëtarëve të tjerë të grupit, ndërsa nxënësit e talentuar sfidohen në dhënien e përgjigjeve dhe zgjidhjen e sistemeve të ndryshme. Të gjitha aktivitetet synojnë zhvillimin e kompetencave të ndryshme si p.sh. kompetencës së komunikimit përmes dhënies së përgjigjeve dhe sqarimit të shembujve për anëtarët e grupit, kompetencës së të menduarit përmes identifikimit të përparësive të zbatimit të metodës së eliminimit ndaj asaj grafike, si dhe kompetencës së të nxënit përmes zbatimit të metodës së eliminimit në zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve me dy të panjohura.



Mësimet model

Në kuadër të udhëzuesit “Matematika dhe mësimdhënia e matematikës për klasat 6-9” janë përfshirë edhe disa tema, të cilat janë njësi mësimore që i takojnë kurrikulit të shkollave të mesme të larta, si dhe një temë interesante nga lënda e matematikës, siç është problemi i Kullës së Hanoit.

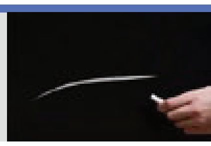
Përfshirja e temave të tilla është bërë për tri qëllime:

1. Mësimdhënësit mund t’i shfrytëzojnë këto tema për t’i realizuar me nxëënsit gjatë aktiviteteve extra-kurrikulare. Realizimi i këtyre temave me nxënës do të ndihmojë zgjerimin e njohurive dhe zhvillimin e kompetencave të tyre, veqanërisht të nxënësve që janë talent në matematikë.
2. Mësimdhënësit mund të freskojnë njohuritë e tyre lidhur me këto tema dhe teknikat dhe strategjitë e reja të mësimdhënies dhe të nxënit që janë përdorur në shtjellimin e tyre t’i zbatojnë gjatë zhvillimit të njësive mësimore që i takojnë kurrikulit të shkollës së mesme të ultë.
3. Temat e tilla mund të shtjellohen gjatë seancave të trajnimit në mënyrë që pjesëmarrësit duke mos qenë të obliguar t’i realizojnë ato në punën e tyre me nxënës, të kenë mundësi të përfshihen aktivisht gjatë realizimit të tyre. Shtjellimi i temave të tilla ofron mundësi që pjesëmarrësit përmes përfshirjes aktive të kuptojnë rëndësinë e rikujtimit të njohurive si parakusht për përfitimin e njohurive të reja, si dhe përparësitë e të nxënit në bashkëpunim me rastin e përfitimit të njohurive të reja dhe përforcimit të tyre.

Mësimet model të cilat janë paraparë për aktivitete extra-kurrikulare janë:

- Piramida
- Kulla e Hanoit
- Vargu (progresioni) gjeometrikë
- Pozita reciproke e dy rrathëve
- Sistemi i dy ekuacioneve me dy të panjohura, njëri prej të cilëve është ekuacion kuadratik dhe tjetri ekuacion linear (Rasti i veçantë i pozitës së rrethit dhe drejtëzës).
- Funksioni eskponencial.

Këto mësime model janë shënuar në mënyrë të veçantë në këtë udhëzues.



Mësim model

Tema: Piramida

Rezultatet e të nxënit: Në fund të seancës, pjesëmarrësit do të jenë të aftë të:

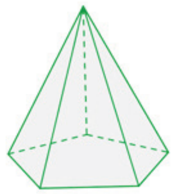
- përkufizojnë saktë piramidën dhe piramidën e rregullt,
- gjejnë formulat për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të piramidës së rregullt trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore,
- zbatojnë formulat për zgjidhjen e detyrave nga jeta praktike.

Fjalët kyçe: Piramidë, piramidë e rregullt, apotemë, bazë, lartësi, mbështjellës.
Materialet dhe burimet: Letra flipcharti, fleta A4, markera, një model i piramidës.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 5 min

Pjesëmarrësit organizohen në grupe me nga 6 anëtarë. Ata do të vëzhgojnë modelin e piramidës dhe në mënyrë individuale do të përshkruajnë, krahasojnë dhe shoqërojnë piramidën me disa objekte të njohura, p.sh.



Përshkruaje: Piramida është një trup gjeometrik. Ajo ka një bazë, një kulm, një mbështjellës, një lartësi, etj.

Krahasoje: Meqë piramida ka një bazë ajo mund të krahasohet me konin, ndërsa fakti se baza është shumëkëndësh ajo mund të krahasohet me prizmin.

Shoqëroje: Piramida si trup të asocion në piramidën e Keopsit, në Kullën e Eifelit në Paris, kulmet e disa shtëpive, etj.

Pjesëmarrësit do të diskutojnë punën e tyre në dyshe dhe në grup. Pas diskutimit, një anëtar i grupit do të shënojë informacionin e mbledhur dhe do ta prezantojë atë para të tjerëve.

Realizimi i kuptimit – 30 min

Pjesëmarrësit do të përgjigjen në këto pyetje:
- Çka është piramida? Si përkufizohet piramida?
- Si mund të klasifikohen piramidat duke u bazuar në bazën e tyre? Si mund të klasifikohen piramidat duke u bazuar në pozicionin që ka lartësia e saj ndaj bazës?
- Cila është formula e përgjithshme për njehsimin e syprinës së sipërfaqes së piramidës?
- Cila është formula e përgjithshme për njehsimin e vëllimit të piramidës?
- Çka quajmë piramidë të rregullt?

Pas dhënies së përgjigjeve, anëtarët e grupeve do të punojnë në mënyrë individuale për të gjetur formulat për njehsimin e syprinave të sipërfaqeve dhe vëllimeve të piramidave të caktuara. Kështu:

Pjesëmarrësit me numrat 1, 2 dhe 3 brenda grupeve do të gjejnë formulën për njehsimin e syprinës së sipërfaqes së piramidës së rregullt trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore, respektivisht.

Pjesëmarrësit me numrat 4, 5 dhe 6 brenda grupeve do të gjejnë formulën për njehsimin e vëllimit të piramidës së rregullt trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore, respektivisht.
Secili grup do të plotësojë tabelën e mëposhtme me formulat e gjetura.

PIRAMIDA E RREGULLT	SYPRINA E SIPËRFAQES	VËLLIMI
Trekëndore	$S=\frac{a}{2}(\frac{a\sqrt{3}}{2}+3h)$	$V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{12}$
Katërkëndore	$S=a(a+2h)$	$V=\frac{a^2H}{3}$
Gjashtëkëndore	$S=3a(\frac{a\sqrt{3}}{2}+h)$	$V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{2}$

Pjesëmarrësit me numrat 1 dhe 4 brenda grupit do të zgjidhin detyrën e parë. Ata me numër 2 dhe 5 do të zgjidhin detyrën 2, ndërsa ata me numrat 3 dhe 6 do të zgjidhin detyrën 3.

Detyra 1. Piramida e rregullt trekëndore ka gjatësinë e brinjës së bazës 12cm dhe gjatësinë e tehut anësor 10cm. Sa cm2 letër nevojitet për të bërë modelin e kësaj piramide, në qoftë se gjatë punës humbet 15% e letrës që kemi? Sa është vëllimi i kësaj piramide?

Detyra 2. Sa m2 material na nevojitet për të ndërtuar një tendë (çadër) në formë të piramidës së rregull katërkëndore me lartësi 2m dhe gjatësi të brinjës së bazës 4m? Sa është vëllimi i kësaj piramide?

Detyra 3. Piramida e rregullt gjashtëkëndore është e ndërtuar e tëra prej qelqit (duke përfshirë dhe brendinë e saj). Gjatësia e tehut anësor të kësaj piramide është për 6cm më e gjatë se gjatësia e brinjës së bazës, kurse raporti i tyre është 5:3. Njehsoni syprinën e sipërfaqes së kësaj piramide. Sa është masa e kësaj piramide nëse dihet se densiteti i qelqit është $\rho=2.5g/cm^3$.
Tri dyshe të pjesëmarrësve do të demonstrojnë zgjidhjet e detyrave për të tjerët.

Reflektimi – 20 min

Pjesëmarrësit në grupe do të zgjidhin këto detyra:
Detyra 4. Shuma e gjatësisë së tehut të bazës dhe lartësisë së faqes anësore të piramidës së rregullt katërkëndore është 11cm. Nëse gjatësia e tehut të bazës rritet për 2cm, ndërsa lartësia faqes anësore për 1cm, atëherë syprina e sipërfaqes së saj rritet për 64cm2. Sa është vëllimi i kësaj piramide?

Detyra 5. Piramida e rregullt katërfaqësore e prerë ka vëllimin V = 3420cm3, ndërsa lartësinë 15 cm. Sa janë gjatësitë e teheve të bazave, nëse dimë se ato janë në proporcionin 3:2?

Dy pjesëmarrës paraqesin zgjidhjet për të tjerët. Për të gjetur në mënyrë automatike syprinën e sipërfaqeve dhe vëllimin e piramidave të drejta katërfaqësore me bazën drejtkëndësh pjesëmarrësit do të shfrytëzojnë uebfaqen **http://www.analyzemath.com/Geometry_calculators/surface_volume_pyramid.html**. Në fund, pjesëmarrësit do të shkruajnë nga një pesëvargësh për piramidën.

Piramida
e drejtë e rregullt
matet vizatohet ndërtohet
Piramida është trup gjeometrik.
Piramida në Egjipt.

Reflektimi nga përvoja: Pjesëmarrësit do të reflektojnë në lidhje me qasjen metodologjike që është përdorur në shtjellimin e kësaj teme. Ata do të diskutojnë rreth përshtatshmërisë së shembullit të parë në krijimin e një baze për përfshirjen e tyre në procesin e të nxënit. Diskutimi do të vazhdojë me analizimin e aktiviteteve të realizuara dhe mundësinë që ato kanë ofruar për të kaluar në mënyrë të natyrshme nga njëra fazë e seancës në tjetrën. Pjesëmarrësit do të komentojnë se sa aktivitetet e realizuara kanë kontribuar në rritjen e motivimit të tyre për t'u përfshirë në procesin e të nxënit, si dhe në ruatjen e interesit të tyre për të nxënë.

Përfshirja e të gjithë pjesëmarrësve në procesin e të nxënit do të jetë çështja tjetër për të cilën do të diskutojnë pjesëmarrësit. Ata do të diferencojnë aktivitetet e realizuara sipas vështirësisë së tyre dhe do të diskutojnë për qëllimin e planifikimit të këtyre aktiviteteve në shtjellimin e temave të ndryshme. Gjithashtu, ata do të identifikojnë edhe përparësitë e zgjedhjes së probleme nga jeta praktike për t'i zgjidhur në orët e mësimit të matematikës, veçanërisht rëndësinë e tyre në rritjen e motivimit të brendshëm të nxënësve për të nxënë.

Tema përmban disa njësi mësimore, prandaj mësimdhënësi mund të zgjedhë pjesë të caktuara për t'i realizuar gjatë shtjellimit të temave përkatëse. Pjesëmarrësit do të fokusohen të identifikojnë se cilat kompetenca mund të zhvillohen përmes aktiviteteve të realizuara.

Mësim model

Tema: Kulla e Hanoit (8 disqe)

Fjalët kyçe: Kulla e Hanoit, formulë rekurente.
Materialet dhe burimet: Letra flip-charti, fleta A4, markera, një model i Kullës së Hanoit.

Rezultatet e të nxënit: Në fund të seancës, pjesëmarrësit do të jenë të aftë të:

- formulojnë problemin e Kullës së Hanoit,
- gjejnë zgjidhjet e problemit të Kullës për rastin e 1, 2 dhe 3 disqeve
- analizojnë zgjidhjen e problemit për 4 disqe,
- provojnë formulën rekurente për rastin e n-disqeve

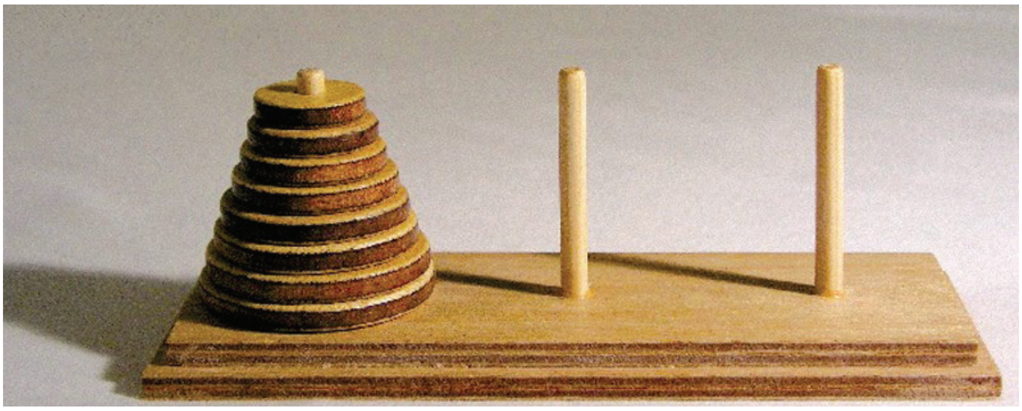
Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 5 min

Pjesëmarrësit do të familjarizohen me problemin e Kullës së Hanoit. Problemi është: Në një pllakë janë vendosur tre shkopinjë në mënyrë vertikale dhe në njërin prej tyre janë vendosur 8 disqe me diametër të ndryshëm në mënyrë që disku me diametër më të vogël gjendet mbi diskun me diametër më të madh, pra në formë të kullës. Kërkohet që të transferohet kulla nga njëri shkop në tjetrin:

1. duke lëvizur vetëm nga një disk gjatë një lëvizjeje dhe
2. duke pasur parasysh që gjatë lëvizjeve asnjëherë disku me diametër më të madh të mos jetë mbi diskun me diametër më të vogël.

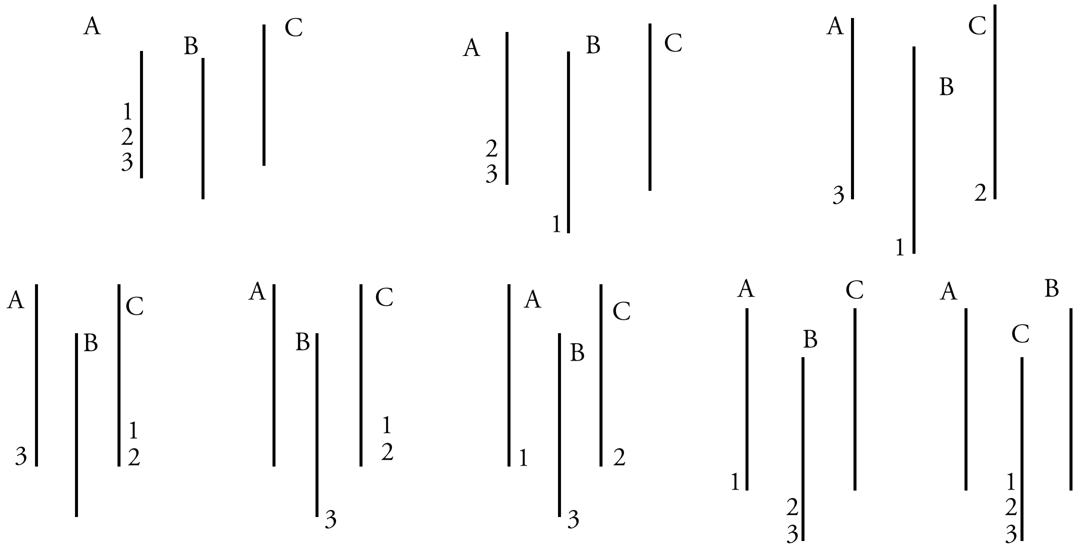
Gjatë zgjidhjes së problemit kërkohet numri minimal i lëvizjeve për t'u zgjidhur problemi.



Realizimi i kuptimit – 40 min

Nga pjesëmarrësit kërkohet që në mënyrë individuale të zgjidhin problemin e kullës së Hanoit kur në shkop janë 1 dhe 2 disqe. Në të dyja rastet, vëmendje të veçantë do t'i kushtohet numrit të lëvizjeve. Është e qartë se në rastin e një disku do të jetë një lëvizje, ndërsa në rastin e dy disqeve do të jenë tri lëvizje. Pjesëmarrësit në dyshe do të zgjidhin problemin kur në shkop janë 3 disqe.

Në modelin e mëposhtëm numri më i madh tregon diskun me diametër më të madh. Pjesëmarrësit do të ndihmohen duke iu treguar lëvizjen e parë. Më pas, pjesëmarrësit do të vazhdojnë zgjidhjen e problemit duke lëvizur disqet sipas kërkesës së detyrës. Zgjidhja duhet të jetë si më poshtë:



Pra, do të ketë gjithsej 7 lëvizje. Dyshja e parë e pjesëmarrësve që e zgjidhë problemin do ta paraqesë atë para të tjerëve. Pjesëmarrësit në grupe me nga 4 anëtarë do të zgjidhin detyrën në rastin e 4 disqeve.

Reflektimi – 15 min

n	T_n
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15

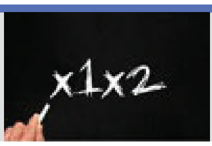
Pjesëmarrësit do të përpiqen të gjejnë formulën rekurente për zgjidhjen e problemit me n-disqe në shkop. Ata do të provojnë se formula rekurente është:

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1}+1, n \geq 1 \end{aligned}\right\}$$

Prej nga fitojmë se $T_n = 2^n - 1$. Ata do të vizatojnë një tabelë, ku në anën e majtë do të shënojnë numrin e disqeve, ndërsa në anën e djathtë numrin minimal të lëvizjeve.

Reflektimi nga përvoja: Edhe pse në kuadër të kurrikulit të matematikës nuk parashikohet të zhvillohet kjo temë me nxënës, mësimdhënësi mund ta realizojë atë, sepse ky problem është mjaft praktik dhe zgjon kërshërinë e nxënësve për ta zgjidhur atë.

Pjesëmarrësit do të reflektojnë në lidhje me qasjen që është përdorur në shtjellimin e kësaj teme. Ata do të analizojnë aspektin metodologjik të aktiviteteve të realizuara dhe veçanërisht shkallën e efikasitetit të tyre në zgjidhjen e problemit të Kullës së Hanoit. Pjesëmarrësit do të identifikojnë përparësitë e zgjidhjes së problemeve përmes aktiviteteve praktike, si dhe përparësitë e punës në grup për të zgjidhur probleme të reja dhe të vështira. Ata do të diskutojnë mundësinë e shtjellimit të kësaj teme me nxënësit e tyre dhe përfitimet që do të kenë nxënësit nga shtjellimi i saj.



Mësim model

Tema: Vargu (progresioni) gjeometrikë

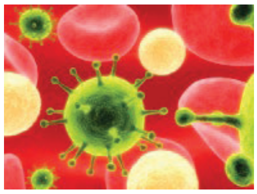
Rezultatet e të nxënit: Në fund të seancës, pjesëmarrësit do të jenë të aftë të:

- dallojnë vargun gjeometrikë,
- gjejnë formulën për njehsimin e termit të n-të të vargut gjeometrikë,
- gjejnë formulën për njehsimin e shumës së n-termave të vargut gjeometrikë,
- zbatojnë formulat e vargut gjeometrikë në zgjidhjen e detyrave të ndryshme nga jeta praktike.

Fjalët kyçe: Varg (progresion) gjeometrikë, term i vargut gjeometrikë, herësi i termave të vargut gjeometrikë.
Materialet dhe burimet: Letra flipcharti, fleta A4, markera.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min



Pjesëmarrësit do të punojnë në grup për të zgjidhur detyrat e mëposhtme:
Detyra 1. Një lloj i bakteries dyfishohet në çdo tri orë. Nëse në fillim kanë qenë 235 bakterie, sa do të jenë pas 12 orëve?

Detyra 2. Ju ankoheni se uji në bazenin e hotelit ku qëndroni është shumë i nxehtë. Stafi i hotelit ju tregon se temperatura e ujit do të zvogëlohet për 10% për çdo 15 minuta. Nëse temperatura momentale e ujit është 35°C, sa do të jetë ajo pas një ore, me afërsi deri në të dhjetën e shkallës Celcius?

Dy pjesëmarrës do të zgjidhin detyrat në tabelë. Pjesëmarrësit do të përgjigjen në pyetjet:

- Çfarë progresioni keni përdorur për të zgjidhur problemet e mësipërme?
- Cili lloj i progresionit gjeometrikë është paraqitur në detyrën 1? Çfarë mund të thuhet për llojin e progresionit në detyrën 2?

Realizimi i kuptimit - 30 min

Mësimdhënësi kërkon që pjesëmarërsit të punojnë në grupe dhe të formulojnë rregullën për vargun gjeometrikë, si dhe të gjejnë formulën për njehsimin e termit të n-të të tij. Përfaqësuesi i një grupi do të paraqes në tabelë mënyrën e gjetjes së formulës për njehsimin e termit të n-të të vargut gjeometrikë:

$$b_1,$$
$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$\ldots\ldots..$$
$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, \text{ (hipoteza induktive)},$$
$$b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^k,$$

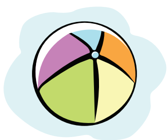
Duke u bazuar në induksionin matematikë, arrijmë në përfundimin se formula për termin e n-të të vargut gjeometrikë është:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Mësimdhënësi kërkon që pjesëmarrësit të përgjigjen në pyetjet:

- Çfarë lloji të vargut gjeometrikë kemi për $q > 1$? Çfarë është vargu për $q = 1$, e çfarë për $0 < q < 1$?
- Çfarë karakteristike të përbashkët kanë vargjet gjeometrike për $q < 0$?

Kërkohet që pjesëmarrësit të punojnë në dyshe dhe të zgjidhin detyrat e mëposhtme:
Detyra 1. Një top lëshohet të bjerë nga lartësia prej 10m. Pas çdo prekje në tokë topi hidhet në 75% të lartësisë së mëparshme të hedhjes. Çfarë lartësie do të arrijë topi në hedhjen e gjashtë?



Detyra 2. Jeta ka blerë 8 libra. Libri i parë ka kushtuar 0.5€. Çmimet e librave të tjerë kanë qenë sa dyfishi i librit të mëparshëm. Sa ka paguar Jeta për librin e 8-të?

Detyra 3. Gjeni termin e parë të vargut gjeometrikë, nëse dihet se termi i tretë është 3, ndërsa i gjashti është 1/9.
Tre pjesëmarrës do të demonstrojnë zgjidhjet e detyrave të tjerëve.
Mësimdhënësi kërkon që pjesëmarrësit të njehsojnë shumën e n-termave të para të progresionit gjeometrikë. Ai/ajo i këshillon pjesëmarrësit të përdorin formulën për gjetjen e termit të n-të dhe të njehsojnë ndryshimin:

$$S_n - qS_n =$$

Si rezultat, pjesëmarrësit fitojnë formulën:

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ për } q \neq 1 \text{ dhe } S_n = nb_1 \text{ për } q = 1.$$

Mësimdhënësi kërkon që pjesëmarrësit t'iu referohen edhe njëherë detyrave të mësipërme dhe të njehsojnë:

1. Sa metra është hedhur topi deri te hedhja e gjashtë?
2. Sa ka paguar Jeta për të gjithë librat?
3. Sa është shuma e 6 anëtarëve të parë të vargut gjeometrikë të dhënë në detyrën 3?

Zgjidhjet e detyrave shënohen në tabelë.

Reflektimi - 20 min

Kërkohet që pjesëmarrësit të plotësojnë në mënyrë individuale tabelën e mëposhtme:

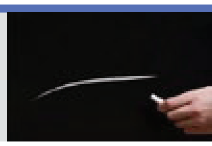
b_1	q	n	b_n	S_n
2	3	7		
	1/2	8	1/16	
1/81		10	243	
	3		567	847
1/3			1/96	21/32
1/2	1/2		1/128	
	-2	4		15

Pjesëmarrësit krahasojnë rezultatet brenda grupit dhe zgjidhjet e sakta i shënojnë në tabelën e vizatuar në tabelën e klasës.

Reflektimi nga përvoja: Pjesëmarrësit do të komentojnë të gjitha aktivitetet që janë realizuar në kuadër të kësaj njësie mësimore. Ata do të analizojnë qasjen metodologjike që është përdorur në shtjellimin e kësaj teme, si dhe efikasitetin e aktiviteteve për të kuptuar përmbajtjen dhe për të zhvilluar shkathtësitë e nxënësve për të zgjidhur detyra ku duhet të zbatohen formulat e progresionit gjeometrikë. Pjesëmarrësit do të diskutojnë natyrën e detyrave që janë dhënë në fillim të njësisë mësimore dhe veçanërisht efektin që këto aktivitete kanë pasur për përfshirjen e të gjithë pjesëmarrësve në procesin e të nxënit. Ata duhet të reflektojnë rreth vazhdimësisë së aktiviteteve në fazat e ndryshme të orës, si dhe sa u arrit që përmes tyre të ruhet interesimi i pjesëmarrësve për të nxënë.

Pjesëmarrësit do të diskutojnë rreth mundësisë që ofron njësia mësimore për të përfshirë në procesin mësimor probleme të ndryshme nga jeta praktike, si dhe përfitimet që mund të kenë nxënësit nga konkretizimi i koncepteve matematike me shembuj të tillë.

Pjesëmarrësit do të komentojnë përfshirjen e tyre në aktivitete të ndryshme dhe do të identifikojnë se cilat prej tyre ndihmojnë zhvillimin e kompetencave të ndryshme të nxënësve. Kujdes i veçantë do t'i kushtohet vlerësimit të shkallës së vështirësisë së aktiviteteve dhe sidomos në identifikimin e aktiviteteve që kërkojnë nivel të lartë të të menduarit dhe që kontribuojnë në zbulimin e talentëve në matematikë. Ky model mësimi mund të përdoret me nxënës, vetëm duhet të shkurtohet koha dhe tabela të fillojë të plotësohet gjatë orës dhe të vazhdohet si detyrë shtëpie.



Mësim model

Tema: Pozita reciproke e dy rrathëve

Rezultatet e të nxënit: Në fund të seancës, pjesëmarrësit do të jenë të aftë të:

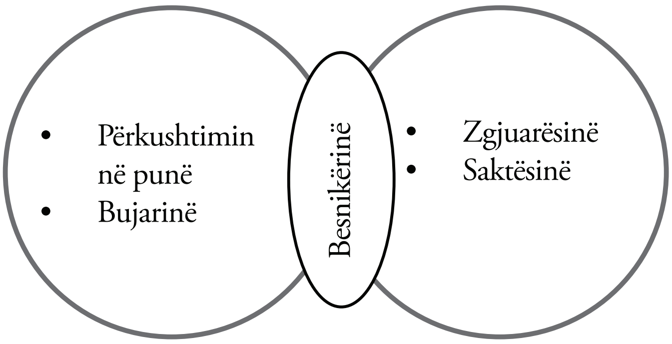
- përkufizojnë rrathët koncentrikë dhe ekscentikë,
- dallojnë 5 pozitat e mundshme të dy rrathëve ekscentrikë,
- shqyrtojnë lidhjen në mes të pozitës së dy rrathëve eksentrikë dhe distancës qendrore të atyre rrathëve ekscentrikë, si dhe shumës/ndryshimit të rrezeve të tyre.

Fjalët kyçe: rrathë koncentrikë, rrathë ekscentrikë.
Materialet dhe burimet: Letra flipcharti, fleta A4, markera.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 15 min

Secili nga pjesëmarrësit do të vizatojë një rreth dhe për 3 min. në brendësi të tij do të shënojë më së shumti tri cilësi të karakterit të njeriut që ai/ ajo vlerëson më së shumti. Më pas, pjesëmarrësit do të punojnë në dyshe për të krahasuar rrathët e tyre dhe për t'i paraqitur në Diagram të Venn-it cilësitë që ata vlerësojnë më shumë, p.sh.



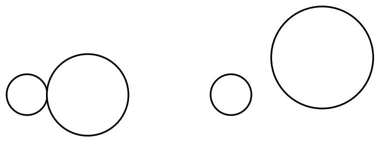
Meqë nga pjesëmarrësit u kërkua që të shënohen më së shumti 3 cilësi që ata vlerësojnë më së shumti, atëherë mund të kemi këto raste:

- Dy pjesëmarrës nuk kanë të përbashkët asnjë cilësi që vlerësojnë më së shumti (rrathët që nuk priten).
- Dy pjesëmarrës kanë shënuar më shumë se nga një cilësi, por ata kanë identifikuar vetëm një cilësi të përbashkët (rrathët që priten në një pikë-rrathët tangjencialë).
- Dy pjesëmarrës kanë të përbashkëta dy nga tri cilësitë e shënuara (rrathët që priten në dy pika).
- Një pjesëmarrës ka identifikuar më pak se tri cilësi dhe të gjitha janë të njëjta me cilësitë e personit tjetër, që ka identifikuar një cilësi më shumë se tjetri (njëri rreth përmbahet në tjetrin).
- Dy pjesëmarrës kanë shënuar të njëjtat cilësi (rrathët përputhen).

Rastet e ndryshme do të shënohen në tabelë. Ky shembull do të shërbejë për të paraqitur temën: Pozita reciproke e dy rrathëve.

Realizimi i kuptimit - 30 min

Pjesëmarrësit do të vizatojnë një tabelë me katër rreshta dhe tri shtylla. Një të tillë do ta vizatohet dhe në tabelë. Pjesëmarrësit do të shënojnë në shtyllën e parë kushtin $r_1<r_2$, ku r_1 dhe r_2 paraqesin rrezet e dy rrathëve ekscentrikë. Më pas, ata do të vizatojnë në shtyllën e dytë pozitat reciproke të mundshme të 2 rrathëve eksentrikë.

KUSHTI	RASTET E MUNDSHME	ANALIZA
$r_1<r_2$		$d(O_1,O_2)= r_1+r_2$ $d(O_1,O_2) > r_1+r_2$ etj.
$r_1=r_2$		
$r_1>r_2$		

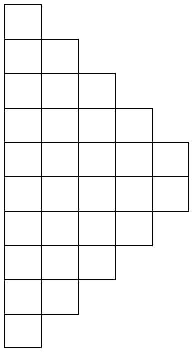
Pasiqë pjesëmarrësit të kenë vizatuar disa raste, ata do të diskutojnë në grup dhe do të plotësojnë shtyllën me të gjitha rastet e mundshme të pozitës reciproke të dy rrathëve ekscentrikë. Mësimdhënësi do të kërkojë nga disa pjesëmarrës që pozitat e tilla t'i vizatojnë në tabelën e klasës. Ai/ajo duhet të kërkojë që pjesëmarrësit t'i kushtojnë kujdes sidomos dy rasteve të pozitës reciproke të dy rrathëve, kur njëri rreth është brenda tjetrit (rasti kur ata priten për së brendshmi, si dhe kur njëri rreth është brenda tjetrit, por nuk kanë pika të përbashkëta). Pasi të vizatohen të gjitha rastet në tabelë, pjesëmarrësit do të analizojnë pozitën e rrathëve dhe do të shënojnë në shtyllën e tretë formulën analitike që paraqet pozitën e tyre. Për të shkruar formulat analitike, pjesëmarrësit udhëzohen të krahasojnë largësinë në mes të dy qendrave të rrathëve dhe shumës/ndryshimit të rrezeve të tyre, p.sh. në rastin e rrathëve që nuk priten ata duhet të shënojnë: $d(O_1,O_2) > r_1+r_2$.
Rezultatet e fituara do të diskutohen në grup. Disa pjesëmarrës do të shënojnë formulat në tabelë dhe do të sqarojnë si kanë ardhur deri te ato. E njëjta procedurë përsëritet për kushtin $r_1=r_2$. Pjesëmarrësit do të vërejnë se nuk është i nevojshëm të shqyrtohet rastit kur $r_1>r_2$.

Reflektimi – 15 min

Meqë është vështirë të mbahen në mend pozitat reciproke të dy rrathëve ekscentrikë duke u bazuar në largësinë e qendrave të tyre dhe lidhjes së kësaj largësie me shumën/ndryshimin e rrezeve të tyre, atëherë është më e përshtatshme që pozita e rrathëve të mbahet në mend nëse ajo lidhet me numrin e pikave të takimit të atyre dy rrathëve. Pra, për të mbajtur në mend për një kohë më të gjatë pozitën e dy rrathëve, pjesëmarrësit do të plotësojnë tabelën e mëposhtme.

	JANË JASHTË NJËRI- TJETRIT $d(O_1,O_2) > r_1+r_2$	PREKEN PËR SË JASHTMI $d(O_1,O_2) = r_1+r_2$	PRITEN NË DY PIKA $r_1-r_2< d(O_1,O_2) <r_1+r_2$	PREKEN PËR SË BRENDSHMI $d(O_1,O_2) = r_1-r_2$ ($\neq 0$)	NJËRI GJENDET BRENDA TJETRIT $d(O_1,O_2) <r_1-r_2$
Priten në dy pika	-	-	+	-	-
Priten në një pikë	-	+	-	+	-
Nuk priten	+	-	-	-	+

Pjesëmarrësit do të plotësojnë këtë “fjalëkryq”:



a) Shenja element
b) Posedon
c) Njëri nga funksionet trigonometrike
d) Pjesa e njëqind e Euros (e pash.)
e) Matematikan i njohur zviceran
f) Elementi i bashkësisë N, Z, Q, etj. (i pash.)
g) Objekt tredimensional
h) Shkurtesa e njërës nga njësitë për matjen e këndeve
i) Diçka që është aktuale (ang.)
j) Simboli i kaliumit

Pjesëmarrësi i parë që plotëson “fjalëkryqin” do të lexojë shtyllën e parë, e cila përmban fjalën që emërton pozitën reciproke të dy rrathëve, qendrat e të cilëve nuk përputhen. Në fund, mësimdhënësi kërkon që pjesëmarrësit të gjejnë shembuj nga jeta praktike në të cilat hasim në pozitën reciproke të dy rrathëve, p.sh. disa stoli, shenja e rrathëve të lojërave olimpike, etj.

Reflektimi nga përvoja: Pjesëmarrësit do të diskutojnë rreth natyrës së aktiviteteve të përdorura për të shtjelluar këtë njësi mësimore dhe veçanërisht ato që janë realizuar në fillim dhe në fund të saj. Ata po ashtu do të analizojnë dhe lidhjen e këtyre aktiviteteve me jetën e përditshme dhe fushat e tjera lëndore. Pjesëmarrësit do të analizojnë pse është kërkuar nga ata të shënojnë maksimum tri cilësi që ata vlerësojnë më së shumti tek njerëzit. Sa është thelbësore kjo për të shtjelluar njësinë mësimore?

Pjesëmarrësit do të komentojnë po ashtu edhe përfshirjen e tyre në identifikimin e pozitave të rrathëve ekscentrikë dhe formulave analitike që karakterizojnë ato pozita. Ata do të diskutojnë rreth nevojës për të gjetur metoda të ndryshme për të sintetizuar informacionin e mësuar në një format që mund të mbahet në mend lehtë dhe për një kohë më të gjatë, siç është rasti në këtë njësi mësimore me plotësimin e tabelës. Në fund pjesëmarrësit do të komentojnë rreth zbatimit të “fjalëkryqit” si një vegël që ndihmon të nxënit dhe integrimin e fushave të ndryshme lëndore. Të njëjtat teknika mund të përdoren edhe gjatë punës me nxënës. Kur punohet me nxënës, mësimdhënësit duhet të kenë kujdes që dy shtyllat e para të tabelës të plotësohen nga paranjohuritë e nxënësve, ndërsa më pas nxënësit duhet të lexojnë njësinë mësimore dhe të plotësojnë shtyllën e tretë.

Mësim model

Tema: Sistemi i dy ekuacioneve me dy të panjohura, njëri prej të cilëve është ekuacion kuadratik e dhe tjetri ekuacion linear (Rasti i veçantë i pozitës së rrethit dhe drejtëzës)

Fjalët kyçe: Sistem i ekuacioneve.
Materialet dhe burimet: Fletë flipcharti, fleta A4, markera, tabela, etj.

Rezultatet e të nxënit: Pjesëmarrësit deri në fund të seancës do të jenë të aftë të:

- dallojnë sistemin e dy ekuacioneve me dy të panjohura, njëri prej të cilëve është kuadratik sipas x dhe y, ndërsa tjetri është linear,
- zgjidhin detyra lidhur me sistemet e tilla
- gjejnë raste në gjeometrinë analitike në të cilat zgjidhja e këtyre sistemeve mund të zbatohet.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 5 min

Kërkohet nga pjesëmarrësit që të përkufizojnë ekuacionin linear me dy të panjohura, ekuacionin kuadratik me dy të panjohura, si dhe të përkufizojnë sistemin e ekuacioneve të formuara nga ekuacionet e mësipërme dhe zgjidhjen e sistemit të tillë. Një pjesëmarrës do të shënojë në tabelë formën e përgjithshme të një sistemi të tillë, pra:

$$\left.\begin{aligned} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f&=0\\ Ax+By+C&=0\end{aligned}\right\} \quad ..... (1)$$

Më pas, mësimdhënësi kërkon që një pjesëmarrës të shënojë në tabelë një sistem të përbërë nga dy ekuacione, ku njëri është ekuacion kuadratik me dy ndryshore, i cili është kuadratik vetëm sipas x dhe y, ndërsa tjetri është ekuacion linear me dy ndryshore, pra:

$$\left.\begin{aligned} ax^2+by^2+cx+dy+e&=0\\ Ax+By+C&=0\end{aligned}\right\} \quad ..... (2)$$

Mësimdhënësi do të theksojë dallimin në mes të dy sistemeve dhe do të sqarojë se gjatë seancës do të analizojnë vetëm sistemet e llojit (2).

Realizimi i kuptimit – 20 min

Mësimdhënësi ka përgatitur 4 zarfe A, B, C, D. Në secilën zarf mësimdhënësi ka futur copa të letrave. Copat e letrave përmbajnë pjesë të zgjidhjeve të 3 sistemeve të ekuacioneve të llojit (2), shënime që nuk janë pjesë e zgjidhjeve të tyre, si dhe disa copa të letrave janë të zbrazëta. Kërkohet nga pjesëmarrësit që të zgjedhin njërën nga zarfet, të lexojnë copat e letrave, të largojnë copat e tepërta, të plotësojnë letrat e zbrazëta, të rendisin copat ashtu që ato të paraqesin zgjidhjet e tri sistemeve të ekuacioneve të llojit (2).

Zarfet përmbajnë zgjidhjet e këtyre detyrave:

Zarfi A:

1) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-6y+9=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+4x+6y+9=0 \\ 2x-3y-1=0 \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+4x-6y+9=0 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}-6=0 \end{array}\right\}$

Zarfi B:

1) $\left.\begin{array}{l} x^2-2x+y^2+2y-2=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1 \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} x^2+2x+y^2-2y-2=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=-1 \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2x+2y-2=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1 \end{array}\right\}$

Zarfi C:

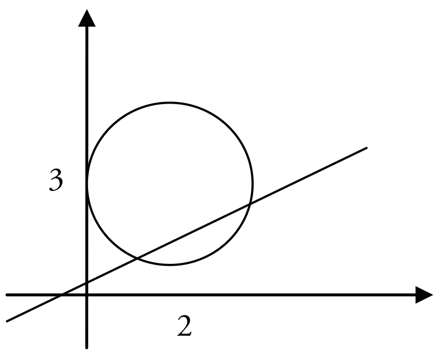
1) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2x-4y-4=0 \\ x-y-2=0 \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2x+4y-4=0 \\ -x+y-2=0 \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2x+4y-4=0 \\ 3x-4y+4=0 \end{array}\right\}$

Zarfi D:

1) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2x-4y+1=0 \\ x+2y-1=0 \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2x+4y+1=0 \\ x+2y+1=0 \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+4x+6y+9=0 \\ 3x-4y+4=0 \end{array}\right\}$

Reflektimi – 35 min

Të gjitha grupet do të ndajnë një fletë në dy pjesë. Për sistemin e parë të ekuacioneve që kanë në zarfin e tyre, pjesëmarrësit në anën e majtë do të transferojnë ekuacionit e rrethit në formë kanonike dhe do të gjejnë qendrën dhe rrezen e tij. Po ashtu, ata do të gjejnë edhe dy pika për drejtëzën e dhënë me ekuacionin linear. Në anë e djathtë pjesëmarrësit do të udhëzohen të vizatojnë rrethin dhe drejtëzën në sistemin koordinativ Oxy. p.s.h.

Forma analitike e sistemit	Forma gjeometrike e sistemit
1) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-6y+9=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} (x-2)^2+(y-3)^2=2^2 \\ 2x-3y+1=0 \end{array}\right\}$ $A(0,\frac{1}{3}),\ B(-\frac{1}{2},0)$	

Pjesëmarrësit do të ndjekin të njëjtën procedurë për të paraqitur grafikisht edhe sy sistemet e tjera. Tre pjesëmarrës do të paraqesin në tabelë zgjidhjet e sistemeve që kanë pasur në zarfin e tyre.

Pjesëmarrësit do të vërejnë se ekuacioni kuadratik me dy të panjohura që është kuadratik vetëm sipas x dhe y paraqet grafikisht një rreth, prandaj sistemi i ekuacioneve të paraqitura në këtë seancë i referohet pozitës reciproke të rrethit dhe drejtëzës. Ata do të vërejnë po ashtu se secili zarf përmban sisteme që i referohen 3 pozitave reciproke të rrethit dhe drejtëzës, pra rastet kur drejtëza e pret rrethin, është tangjentë e tij, si dhe rasti kur drejtëza nuk ka asnjë pikë të përbashkët me rrethin.

Reflektimi nga përvoja: Pjesëmarrësit do të reflektojnë në lidhje me aktivitetet e zhvilluara dhe përshtatshmërinë e tyre në shtjellimin e njësisë mësimore. Lidhur me aktivitetin që realizohet me renditjen e copave të detyrës së zgjidhur, pjesëmarrësit do të përgjigjen në këto pyetje:

- Cilat janë përparësitë dhe mangësitë e dhënies së zgjidhjes së detyrës në copa të prera dhe të përziera në krahasim me dhënien e detyrës për t'u zgjidhur?
- Pse është mirë që në kuadër të copave të përziera të vendosim copa "të tepërta" dhe "copa të zbrazëta"?
- Nëse kjo teknikë realizohet me nxënës, si mundësohet aktivizimi i të gjithë nxënësve në procesin e të nxënit? Sa mund të sfidohen nxënësit e talentuar?
- Cilat kompetenca mund të zhvillohen te nxënësit me zbatimin e teknikës së tillë në procesin mësimor.

Pjesëmarrësit duhet të kenë kujdes që gjatë zbatimit të teknikës së copave të përziera me nxënës të japin më shumë instruksione se si duhet të renditen copat, sidomos nëse shtjellohet një njësi e re. Ndërsa teknika është shumë e përshtatshme për ta përdorë në orët e ushtrimeve, sepse nxënësit janë të familjarizuar me konceptet dhe mbetet që përforcimi i tyre të bëhet duke zbatuar njohuritë që kanë fituar në orët e mëparshme.

Në fund, pjesëmarrësit do të analizojnë se sa efikas ishte aktiviteti në fazën e reflektimit. Ata do të diskutojnë se sa u ndihmoi vizatimi i grafikëve (vizualizimi) në përforcimin e informacionit të mësuar dhe në mbajtjen në mend të njohurive të fituara për një kohë më të gjatë.

Mësim model

Tema: Funksioni eksponencial

Rezultatet e të nxënit: Pjesëmarrësit deri në fund të seancës do të jenë të aftë të:

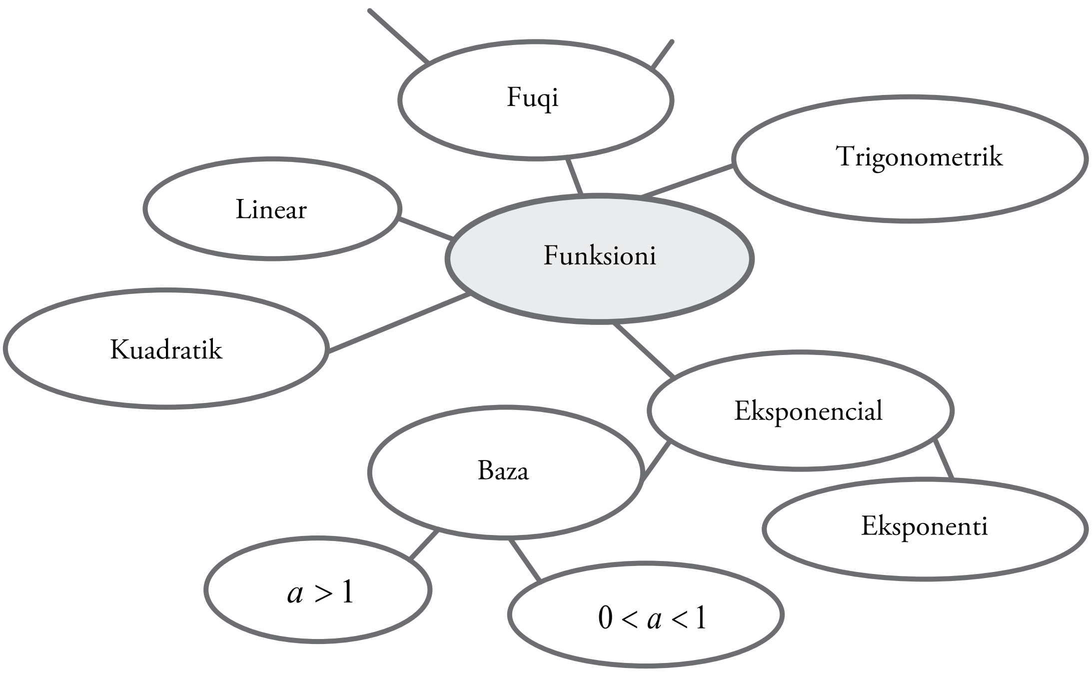
- analizojnë grafikun e funksionit eksponencial $y = a^x$, në varësi të parametrit a ($0 < a < 1$ dhe $a > 1$),
- konstruktojnë grafikët e funksioneve $y = a^x$ dhe $y = -a^x$ dhe të shqyrtojnë monotoninë e tyre në varësi të parametrit a ($0 < a < 1$ dhe $a > 1$)
- gjejnë shembuj të zbatimit të funksioneve eksponenciale në fizikë, mjekësi, ekonomi etj.

Fjalët kyçe: Funksion eksponencial, monotoni e funksionit, parametër.
Materialet dhe burimet: Fletë flipcharti, fleta A4, markera, tabela, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi – 10 min

Pjesëmarrësit në mënyrë individuale do të shënojnë çka dinë për funksionet, përkufizimin e tyre dhe veçanërisht atë që dinë për funksionin eksponencial dhe vetitë e tij. Informacionet e shënuara do të diskutohen brenda grupit. Mësimdhënësi mbledh informacionet dhe i shënon në tabelë në formë të hartës së mendimeve



Realizimi i kuptimit – 35 min

Secili grup do të ketë njërën nga tri fletët e ekspertit. Pjesëmarrësit në grupe do të diskutojnë dhe zgjidhin detyrat në fletën e tyre të ekspertit.

Fleta e ekspertit Nr. 1

1. Tregoni se funksioni $y = a^x$ është zvogëlues për $0 < a < 1$.
2. Në të njëjtin sistem koordinativ Oxy vizatoni grafikët e funksioneve

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dhe $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, si dhe shqyrtoni monotoninë e tyre.

3. Gjeni shembuj nga jeta praktike (nga fizika, mjekësia, ekonomia, etj.) të cilat mund të ilustrohen me anën e funksioneve eksponenciale.

Fleta e ekspertit Nr. 2

1. Tregoni se funksioni $y = a^x$ është rritës për $a > 1$.
2. Në të njëjtin sistem koordinativ Oxy vizatoni grafikët e funksioneve $y = 2^x$ dhe $y = 3^x$, si dhe shqyrtoni monotoninë e tyre.
3. Pse në funksionin eksponencial $y = a^x$, parametri a duhet të plotësojë kushtet $a > 0$ dhe $a \neq 1$?

Fleta e ekspertit Nr. 3

1. Në të njëjtin sistem koordinativ Oxy vizatoni grafikët e funksioneve
$y = -2^x$ dhe $y = -3^x$, si dhe shqyrtoni monotoninë e tyre.
2. Në të njëjtin sistem koordinativ Oxy vizatoni grafikët e funksioneve
$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dhe $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$, si dhe shqyrtoni monotoninë e tyre.
3. Cilit prej intervaleve $(-\infty, -1)$ ose $(-1, 0)$ i takon numri $a = -\left(\frac{1}{7}\right)^{-0.6}$?

Pjesëmarrësit do të paraqesin zgjidhjet në tabelë.

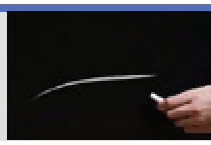
Reflektimi – 15 min

Pjesëmarrësit në mënyrë individuale do të zgjidhin detyrat e mëposhtme:
Detyra 1. Për shkak të veprimit të një substance antibakteriale, zvogëlimi i numrit prej 6000 baktereve që ishin në fillim është duke u realizuar sipas formulës:

$$N(t) = 6{,}000\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

ku $N(t)$ është numri momental i baktereve në kohën t, ndërsa t është koha e shprehur në orë. Sa do të jetë numri i baktereve pas a) 2 orëve, b) 4 orëve?

Detyra 2. Të hollat e depozituara në një llogari të kursimeve do të dyfishohen çdo $\frac{72}{100r}$ vite, ku r është norma e interesit në vit. Nëse 7,000€ janë depozituar me normën $r = 8\%$, sa do të jetë shuma në llogari pas a) 18 viteve, b) 27 viteve?



Detyra 3. Shkalla e shtimit natyror të popullatës në Kosovë është 12‰. Sa banorë do të ketë vendi ynë pas: a) 10 viteve dhe b) 20 viteve, nëse për momentin e tanishëm llogaritet se Kosova ka $2\cdot10^6$ banorë?
Pjesëmarrësit do të krahasojnë rezultatet brenda grupit. Tre nga ata do të paraqesin zgjidhjet e detyrave në tabelë.

Reflektimi nga përvoja: Pjesëmarrësit do të diskutojnë rreth përshtatshmërisë së përdorimit të teknikës harta e mendimeve (kllaster) në njësi të caktuara të lëndës së matematikës. Ata do të identifikojnë përparësitë e zbatimit të kësaj teknike në faza të ndryshme të orës mësimore, si dhe mundësitë që ofron kjo teknikë për të integruar në matematikë njësi mësimore të ndryshme dhe informacione nga fusha të tjera lëndore.

Diskutimi i pjesëmarrësve do të vazhdojë rreth përdorimi të fletave të ekspertit në procesin mësimor. Diskutimi do të orientohet përmes këtyre pyetjeve:

- Sa e përshtatshme ishte përdorim i kësaj teknike në shtjellimin e njësisë mësimore?
- Sa u arrit që përmes detyrave në fletët e ekspertit të shtjellohet njësia mësimore?
- Çfarë ishte niveli i pyetjeve dhe detyrave në fletët e ekspertit? Si duhet renditur pyetjet dhe detyrat në "fletët e ekspertit"?
- Kur përdoret me nxënës, sa do të ndikojnë të qenit "ekspert" në motivimin e brendshëm të nxënësve për të nxënë?
- Cilat kompetenca mund të zhvillohen tek nxënësit me përdorimin e kësaj teknike në klasë?

Pjesëmarrësit duhet ta kenë të qartë, se gjatë fazës së realizimit të kuptimit është kërkuar që të rikujtohet informacioni që ata dinë rreth funksionit eksponencial, ndërsa kur të zbatohet kjo teknikë me nxënës, atëherë nxënësit duhet të lexojnë/ shohin ndonjë prezantim dhe të përgjigjen në pyetjet dhe detyrat e parashtruara në fletët e ekspertit.

Një model testi për vlerësimin e njohurive të nxënësve për kapitullin

Teorema e Pitagorës për klasën e tetë

MATEMATIKA

Klasa e tetë

Test përmbledhës për Teoremën e Pitagorës

Emri dhe mbiemri: _______________

Klasa: __________________________

Koha e punës: 45 min

Numri i pikëve: 20

1. Teorema e Pitagorës thotë:

____

____

____

(2 pikë)

2. Nëse me a dhe b shënojmë gjatësitë e kateteve, ndërsa me c gjatësinë e hipotenuzës, atëherë cila nga formulat e mëposhtme paraqet formën aritmetike të Teoremës së Pitagorës:

a) $c^2 = a^2 - b^2$
b) $c^2 = a^2 + b^2$
c) $a^2 = b^2 - c^2$
d) $a^2 = b^2 + c^2$

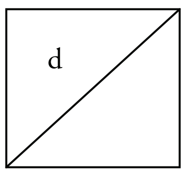
(1 pikë)

3. Në anën e majtë janë dhënë gjatësitë e kateteve të disa trekëndëshave kënddrejtë, ndërsa në anën e djathtë gjatësitë e hipotenuzave. Duke përdorë Teoremën e Pitagorës, shoqëroni përgjigjet e sakta:

a) 2cm, 3cm	1) 5cm
b) 2cm, 4cm	2) $2\sqrt{5}$ cm
c) $\sqrt{2}$ cm, 1cm	3) $\sqrt{13}$ cm
d) 3cm, 4 cm.	4) $\sqrt{3}$ cm

(4 pikë)

4. Të njehsohet perimetri dhe syprina e sipërfaqes së katrorit me diagonale d=3 $\sqrt{2}$ cm.

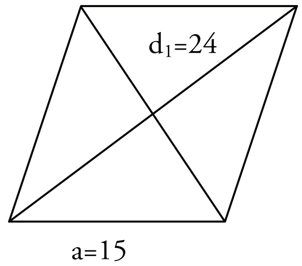


(2 pikë)

5. Diagonalet e rombit __________________ dhe janë reciprokisht _________________.

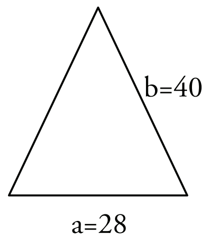
(2 pikë)

6. Njehsoni gjatësinë e diagonales së shkurtër të rombit, nëse gjatësia e njërës brinjë është a=15 cm, kurse gjatësia e diagonales tjetër është d_1=24 cm.



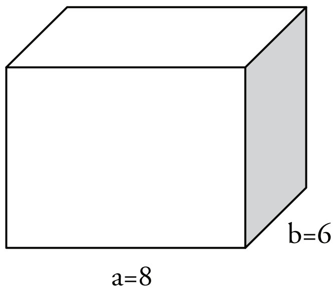
(3 pikë)

7. Njehsoni syprinën e sipërfaqes së trekëndëshit barakrahësh gjatësitë e brinjëve të të cilit janë a=28cm dhe b=40cm.



(3 pikë)

8. Njehsoni gjatësinë e diagonales dhe syprinën e sipërfaqes së kuboidit, nëse dihet se vëllimi i tij është $V=144cm^3$ dhe gjatësitë e bazave a=8cm, b=6cm.



(3 pikë)

Legjenda e testit:

PIKËT E FITUARA	NOTA
0 - 9	1
10 - 11	2
12 - 15	3
16 - 18	4
19 - 20	5

Rezultati i pikëve të grumbulluara:

Forma për përgatitjen e mësimit model

Data: ________________	Lënda: ____________________________________	Klasa: __________
Njësia mësimore (Tema): ____		
Tipi i orës (Rretho): a) Zhvillim b) Përsëritje c) Ushtrime ç) Vlerësim d) Testim		
Mjetet mësimore: ____		
Rezultatet e të nxënit : 1. ____ 2. ____ 3. ____		
Fjalët kyqe: ____		

Zhvillimi i mësimit

EVOKIMI – E:

REALIZIMI I KUPTIMIT – R:

REFLEKTIMI – R:

Vetëvlersimi – Analizë e orës së mbajtur: a) Plotësisht i kënaqur b) I Kënaqur
c) Nuk jam i kënaqur. Nëse nuk jeni i kënaqur, tregoni dy – tri arsye

1.____________ 2. ____________ 3. ____________

Shtojcë

Përmbledhje mësimesh nga librat e matematikës për klasat 6 – 9

1. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 6, Dukagjini 2004
2. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 7, Dukagjini 2004
3. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 8, Dukagjini 2005
4. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 9, Dukagjini 2007

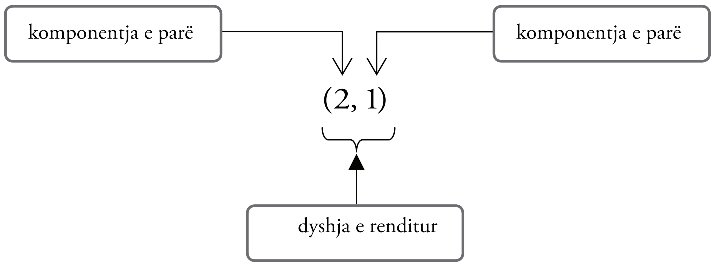
Prodhimi kartezian i dy bashkësive

Ju do të mësoni:

- të gjeni prodhimin kartezian të dy bashkësive.

Fjalori: dyshja e renditur, prodhimi kartezian.

Konsiderojmë bashkësinë me dy elemente $\{x, y\}$. Më parë mësuam se renditja e elementeve në një bashkësi nuk luan rol, pra, mund të shkruajmë $\{x, y\} = \{y, x\}$. Nëse në bashkësinë $\{x, y\}$ përcaktojmë renditjen, d.m.th. dihet se elementi x është në vend të parë, kurse elementi y në vend të dytë, në vend të $\{x, y\}$ shkruajmë (x, y). Bashkësinë (x, y) e quajmë dyshe të renditur të elementeve x, y.
Me shembullin e mëposhtëm janë emërtuar pjesët e një dysheje të renditur të numrave.



Në bazë të përkufizimit të dyshes së renditur mund të shkruajmë:

- $(x, y) \neq (y, x), \ x \neq y$.
- $(x, y) = (y, x)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = y$.
- $(x, y) = (3,5)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = 3$ dhe $y = 5$.

Shembull 1. Janë dhënë bashkësitë: $A = \{a, b, c, d\}$ dhe $B = \{1, 2, 3\}$. T'i formojmë të gjitha dyshet e renditura, ku komponentja e paraë është nga bashkësia *A*, kurse komponentja e dytë nga bashkësia *B*.
Kemi:

dyshet ku komponentja e parë është *a* janë: $(a,1), (a,2), (a,3)$
dyshet ku komponentja e parë është *b* janë: $(b,1),\ (b,2),\ (b,3)$
dyshet ku komponentja e parë është *c* janë: $(c,1),\ (c,2),\ (c,3)$
dyshet ku komponentja e parë është *d* janë: $(d,1), (d,2), (d,3)$.

Unionin e të gjitha këtyre dysheve të renditura e shënojmë *A x B* dhe e quajmë *prodhim kartezian* të bashkësive A dhe B.
Pra:

$$A \times B = \{\ (a,1), (a,2), (a,3),\ (b,1), (b,2), (b,3),\ (c,1), (c,2), (c,3),\ (d,1), (d,2), (d,3)\}.$$

Vërejmë se bashkësia *A x B* ka 12 elemente. Çfarë lidhje ka numri i elementeve të bashkësisë *A x B* me numrin e elementeve të bashkësive A dhe B?
Në bazë të shembullit të mësipërm, marrim këtë përkufizim përshkrues:

Prodhimi kartezian i dy bashkive:

Prodhim kartezian të bashkësive A dhe B quajmë bashkësinë e të gjitha dysheve të renditura (a, b), ku $a \in A$ dhe $b \in B$. Simbolikisht $A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \text{ dhe } \ b \in B\}$.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Plotësoni:

$a)$ $(x,4)=(y,4)$, vetëm nëse _________.

$b)$ $(3,2)=(3,a)$, vetëm nëse _________.

$c)$ $(1,7)=(a,b)$, vetëm nëse ________ dhe ________.

2. A është e mundur të shkruhet:

$a)$ $(x,3)=(x,2)$.

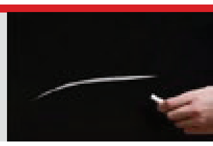
$b)$ $(x,3)=(5,3)$.

3. Janë dhënë bashkitë: $A=\{1,3,5\}$dhe $B=\{1,2,3,4\}$. Njehësoni:

$a)$ $A\times B$. $b)$ $B\times A$. $c)$ $B\times B$.

4. Caktoni bashkësitë: A dhe B, nëse:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),$$
$$(3,a),(3,b),(3,c),(3,d),(4,a),(4,b),(4,c),(4,d)\}.$$



Gjatësia e segmentit, largesa e pikave

Ju do të mësoni:

- *të matni gjatësinë e segmenteve dhe t'i krahasoni ato.*
- të gjeni largesën ndërmjet pikave.

Fjalori: gjatësi e segmentit, largesë ndërmjet pikave.
Me pikat *A* dhe *B* në fig.2.23 janë shënuar dy qytete, kurse vijat që i lidhin ato paraqesin rrugët ndërmjet atyre qyteteve. Në qoftë se dëshirojmë të arrijmë prej një qyteti në tjetrin për kohë sa më të shkurtër, natyrisht duke lëvizur me shpejtësi të njëjtë, është e qartë se do të zgjedhim rrugën më të shkurtër.
Kështu, nga të gjitha vijat e hapura me skaje pikat *A* dhe *B,* rruga më e shkurtër është rruga *d.*

Tani shtrohet pyetja: sa e gjatë është kjo rrugë?

Më herët kemi mësuar se:

- çdo segment mund të matet.
- gjatësinë e segmentit, e shprehim me numra të caktuar të milimetrave, centimetrave, metrave apo njësive të tjera, gjegjësisht me numrat matës dhe me njësitë matëse.
- segmentet me gjatësi të barabartë janë segmente të barabarta.
- të krahasosh segmentet do të thotë të krahasosh gjatësitë e tyre.

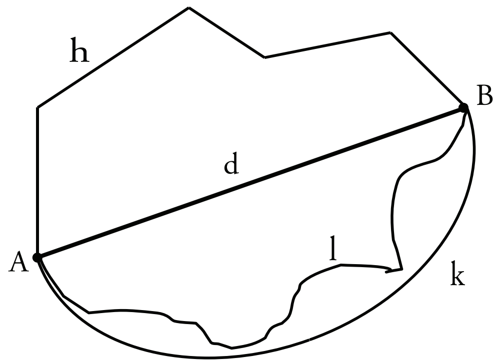


Fig.2.23

Zakonisht, gjatësinë e segmentit *AB* e shënojmë me $|AB|$. Kështu themi se segmenti *AB* ka gjatësinë 3 *cm* dhe shkruajmë $|AB| = 3cm$. Gjatësitë e segmenteve ndonjëherë i shkruajmë me shkronja të vogla $a, b, c, d, \ldots$ etj.
Matni segmentet në fig. 2.24. Krahasoni ato sipas gjatësisë. Ç'mund të thoni për largesën e pikave të skajshme të atyre segmenteve?

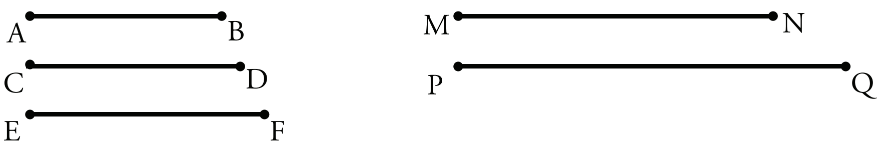


Fig.2.24

Ju do të konstatoni se :

- në qoftë se segmenti AB ka gjatësinë a, kurse segmenti EF ka gjatësinë b, dhe nëse $a<b$ atëherë $AB < EF$ (thuhet se segmenti AB është më i shkurtër se segmenti EF, ose segmenti EF është më i gjatë se segmenti AB).
- *Largesa* ndërmjet dy pikave është e barabartë me gjatësinë e segmentit që i bashkon ato dy pika. Kur segmenti AB ka gjatësinë a, thuhet se *largesa* e pikave A dhe B është a.
- largesat e pikave A e B dhe pikave C e D janë të njëjta, kur gjatësitë e segmenteve AB dhe CD, janë të barabarta, pra, $AB = CD$
- largesa e pikave M dhe N është më e vogël se ajo e pikave P dhe Q, në qoftë se segmenti MN është më i shkurtër se segmenti PQ.

Kështu, rruga d është e gjatë aq sa është gjatësia e segmentit AB. Po ashtu mund të matet edhe gjatësia e rrugës h, përkatësisht gjatësia e vijës së thyer AB (si shumë e gjatësive të segmenteve që e përbëjnë atë vijë), kurse gjatësitë e rrugëve l dhe k do t'i njehësojmë më vonë kur të mësojmë matjen e gjatësive të disa vijave të lakuara.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Plotësoni tabelën e mëposhtme duke u mbështetur në hartën e Kosovës në fig.2.25.

RRUGA	GJATËSIA E RRUGËS (NË KM)
Prishtinë – Pejë	
Prishtinë – Prizren	
Gjakovë – Prishtinë (nëpër Prizren)	
Prishtinë – Gjilan (nëpër Ferizaj)	
Prishtinë – Mitrovicë	
Prishtinë – Klinë – Pejë – Gjakovë	

2. Tregoni të gjitha mundësitë për të udhëtuar nga Prizreni në Mitrovicë duke u mbështetur në fig.23. Cila është rruga më e shkurtër?

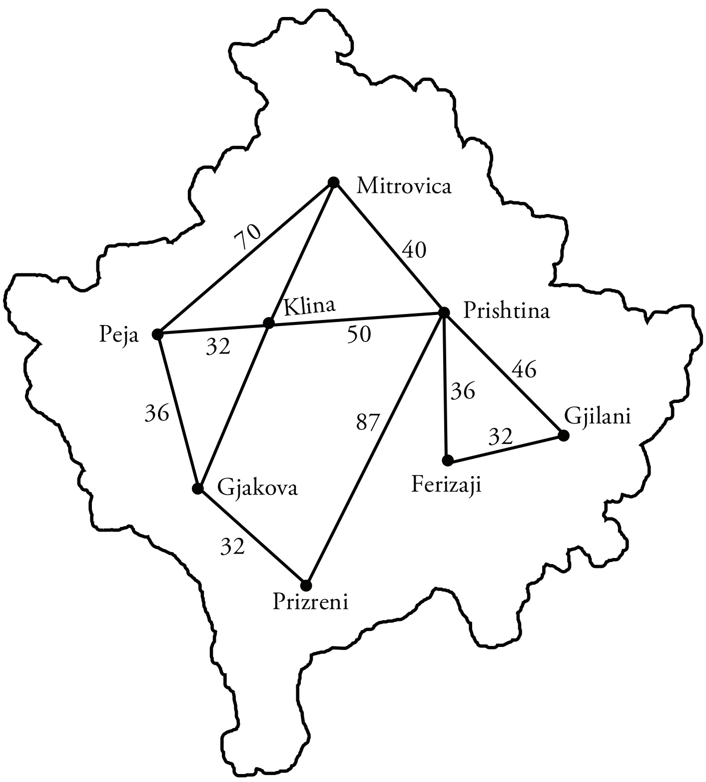
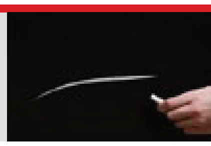


Fig. 2.25



Plotpjesëtueshmëria me 3 dhe 9

Ju do të mësoni:

- të dalloni numrat e plotpjesëtueshëm me 3 dhe me 9.

Fjalori: plotpjesëueshmëria me 3, plotpjesëtueshmëria me 9.

Plotpjesëtueshmëria me 3. Në fillim të marrim këta shembuj:
Shembull 1. Konsiderojmë numrat natyrorë 75, 243 dhe 111111.
Numrat 75, 243 dhe 111111 janë të plotpjesëtueshëm me numrin 3, sepse

$$75 = 3 \cdot 25, \quad 243 = 3 \cdot 81 \text{ dhe } 111111 = 3 \cdot 37037.$$

Të shohim tani shumën e shifrave të numrave të dhënë. Kemi:

$$
\begin{array}{lclcl}
75 & \rightarrow & 7+5=12 & \text{dhe} & 12 \vdots 3. \\
243 & \rightarrow & 2+4+3=9 & \text{dhe} & 9 \vdots 3. \\
111111 & \rightarrow & 1+1+1+1+1+1=6 & \text{dhe} & 6 \vdots 3.
\end{array}
$$

Vërejmë se shuma e shifrave të numrave të dhënë plotpjesëtohet me 3.
Pra, kur një numër natyror është i plotpjesëtueshëm me numrin 3, edhe shuma e shifrave të tij është numër i plotpjesëtueshëm me numrin 3.

Shembull 2. Konsiderojmë numrat natyrorë 736, 3764 dhe 17473.
Të shohim në fillim se shuma e shifrave të secilit nga numrat e dhënë nuk është numër i plotpjesëtueshëm me numrin 3. Vërtet:

$$
\begin{array}{lclcl}
736 & \rightarrow & 7+3+6=16 & \text{dhe} & 16 \not\vdots 3. \\
3764 & \rightarrow & 3+7+6+4=20 & \text{dhe} & 20 \not\vdots 3. \\
17473 & \rightarrow & 1+7+4+7+3=22 & \text{dhe} & 22 \not\vdots 3.
\end{array}
$$

Nga ana tjetër, asnjëri nga numrat e dhënë nuk është i plotpjesëtueshëm me numrin 3, sepse:

$$736 = 3 \cdot 245 + 1, \quad 3764 = 3 \cdot 1254 + 2 \text{ dhe } 17473 = 3 \cdot 5824 + 1.$$

Pra, kur shuma e shifrave të një numri natyrorë nuk është numër i plotpjesëtueshëm me numrin 3, as vet numri nuk është i plotpjesëtueshëm me numrin 3.

Në vazhdim do të sqarojmë pak më ndryshe rregullën e mësipërme. Le të jetë x një numër natyror p.sh. pesëshifrorë dhe le të jenë a,b,c,d dhe e shifrat e tij. Nëse e është shifra e njësheve, d shifra e dhjetësheve, c shifra e qindësheve, b shifra e mijësheve dhe a shifra e dhjetëmijësheve, numrin x mund ta shkruajmë kështu:

Plotpjesëtueshmëria me 3:

Nëse shuma e shifrave të një numri natyror është numër i plotpjesëtueshëm me 3, ai numëtr është i plotpjesëtueshëm me numrin 3.
Nëse shuma e shifrave të një rumri natyror nuk është numër i plotpjesëtueshëm me numrin 3, ai numër nuk është i plotpjesëtueshëm me 3.

$$\begin{aligned}
x = \overline{abcde} &= a\cdot 10000 + b\cdot 1000 + c\cdot 100 + d\cdot 10 + e\cdot 1\\
&= a\cdot(9999+1) + b\cdot(999+1) + c\cdot(99+1) + d\cdot(9+1) + e\\
&= 9999\cdot a + a + 999\cdot b + b + 99\cdot c + c + 9\cdot d + d + e\\
&= (9999\cdot a + 999\cdot b + 99\cdot c + 9\cdot d) + (a+b+c+d+e)\\
&= (3\cdot 3333\cdot a + 3\cdot 333\cdot b + 3\cdot 33\cdot c + 3\cdot 3\cdot d) + (a+b+c+d+e)\\
&= 3\cdot \underbrace{(3333\cdot a + 333\cdot b + 33\cdot c + 3\cdot d)}_{k\in N} + (a+b+c+d+e)\\
&= 3\cdot k + (a+b+c+d+e).
\end{aligned}$$

Vërejmë se numri natyror x është paraqitur si shumë e dy mbledhorëve, ku mbledhori i parë është numër i plotpjesëtueshëm me 3, kurse mbledhori i dytë paraqet shumën e shifrave të numrit x.
Nga ajo që kemi mësuar më parë dimë se shuma e dy mbledhorëve është numër i plotpjesëtueshëm me numrin e dhënë, kur secili nga mbledhorët është numër i plotpjesëtueshëm me atë numër.
Në bazë të kësaj numri $x = \overline{abcde}$ është i plotpjesëtueshëm me numrin 3, vetëm kur shuma e shifrave të tij $a+b+c+d+e$ është numër i plotpjesëtueshëm me numrin 3.

Plotpjesëtueshmëria me 9. Le të jetë x një numër natyror p.sh. pesëshifrorë dhe le të jenë a,b,c,d dhe e shifrat e tij. Ngjashëm sikur edhe më lart, numrin x mund ta shkruajmë kështu:

$$\begin{aligned}
\overline{x = abcde} &= a\cdot 10000 + b\cdot 1000 + c\cdot 100 + d\cdot 10 + e\cdot 1\\
&= a\cdot(9999+1) + b\cdot(999+1) + c\cdot(99+1) + d\cdot(9+1) + e\\
&= 9999\cdot a + a + 999\cdot b + b + 99\cdot c + c + 9\cdot d + d + e\\
&= (9999\cdot a + 999\cdot b + 99\cdot c + 9\cdot d) + (a+b+c+d+e)\\
&= (9\cdot 1111\cdot a + 9\cdot 111\cdot b + 9\cdot 11\cdot c + 9\cdot d) + (a+b+c+d+e)\\
&= 9\cdot \underbrace{(1111\cdot a + 111\cdot b + 11\cdot c + d)}_{k\in N} + (a+b+c+d+e)\\
&= 9\cdot k + (a+b+c+d+e).
\end{aligned}$$

Vërejmë se numri natyror x është paraqitur si shumë e dy mbledhorëve, ku mbledhori i parë është numër i plotpjesëtueshëm me 9, kurse mbledhori i dytë paraqet shumën e shifrave të numrit x.
Nga ajo që kemi mësuar më parë dimë se shuma e dy mbledhorëve është numër i plotpjesëtueshëm me numrin e dhënë, kur secili nga mbledhorët është numër i plotëpjesëtueshëm me atë numër.
Në bazë të kësaj numri $x = \overline{abcde}$ është i plotpjesëtueshëm me numrin 9, vetëm kur shuma e shifrave të tij $a+b+c+d+e$ është numër i plotpjesëtueshëm me numrin 9.

Plotpjesëtueshmëria me 9:

Nëse shuma e shifrave të një numri natyror është numër i plotpjesëtueshëm me 9, ai numëtr është i plotpjesëtueshëm me numrin 9.
Nëse shuma e shifrave të një rumri natyror nuk është numër i plotpjesëtu-eshëm me numrin 9, ai numër nuk është i plotpjesëtueshëm me 9.

Shembull 3. Numri 12345 nuk është i plotpjesëtueshëm me numrin 9, sepse shuma e shifrave të tij 1+2+3+4+5=15 nuk është numër i plotpjesëtueshëm me numrin 9.

Shembull 4. Numri 6921 është i plotpjesëtueshëm me numrin 9, sepse shuma e shifrave të tij 6+9+2+1=18 është numër i plotpjesëtueshëm me 9.

Shembull 5. Le të jetë dhënë bashkësia

$A=\{57,108,225,372,407,8078,40302,222111,301030101,777777777\}$. Caktoni bashkësitë:
$B=\{x\in A : x$ është i plotpjesëtueshëm me $3\}$
$C=\{x\in A : x$ është i plotpjesëtueshëm me $9\}$.
Duke u bazuar në rregullat e mësipërme, gjejmë se:

$$B=\{57,108,225,372,40302,222111,301030101,777777777\}$$

$$C=\{108,225,40302,222111,777777777\}.$$

Gjeni bashkësinë $C\cap D$ dhe tregoni se çka paraqesin elementet e saj.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Janë dhënë numrat natyrorë 87, 437, 2894, 5640 dhe 7584. Tregoni se cilët nga këta numra janë të plotpjesëtueshëm me numrin 3.
2. Janë dhënë numrat natyrorë 783, 9243, 5784, 6327 dhe 7245. Tregoni se cilët nga këta numra janë të plotpjesëtueshëm me numrin 9.
3. Shkruani të gjitha shifrat, të cilat kur vendosen në katror, fitohet numër i plotpjesëtueshëm me numrin 3:

$a)\ 41\square 7.\qquad b)\ 743\square.\qquad c)\ 3\square 25.\qquad d)\ 15\square 26.$

4. Shkruani të gjitha shifrat, të cilat kur vendosen në katror, fitohet numër i plotpjesëtueshëm me numrin 9:

$a)\ 7\square 4.\qquad b)\ 473\square.\qquad c)\ 91\square 3.\qquad d)\ 21\square 35.$

5. Shkruani të gjitha shifrat, të cilat kur vendosen në katror, fitohet numër i plotpjesëtueshëm me 2 dhe 3:

$a)\ 74\square.\qquad b)\ 457\square.\qquad c)\ 3\square 456.$

6. Shkruani numrin më të madh dhe më të vogël treshifrorë të plotpjesëtu-eshëm me:

$a)\ 3.\qquad b)\ 9.$

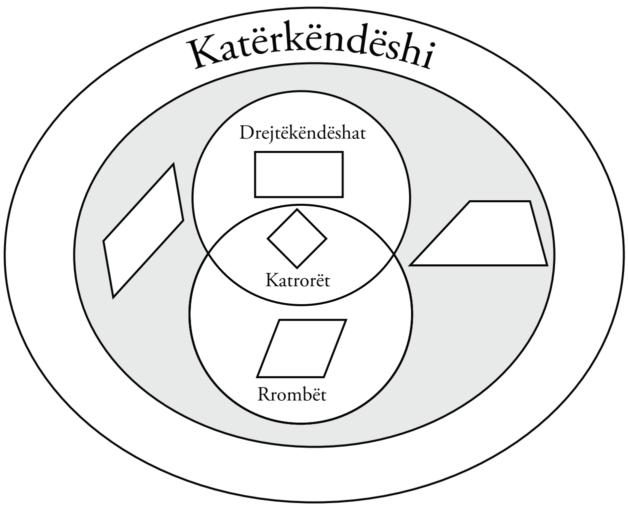
Trapezi

Ju do të mësoni:

- të emërtoni katërkëndëshin me një palë brinjë paralele.
- të identifikoni lartësinë e trapezit, bazat e trapezit dhe këndet e trapezit.

***Fjalori*:** trapez, trapez barakrahësh, trapez kënddrejt.

Shpjegoni diagramin e mëposhtëm. Përshkruani vetitë e katërkëndëshit



Trapezi:

Katërkëndëshin, i cili i ka një palë brinjë paralele, e quajmë trapez.

Në trapezin ABCD brinjët AB dhe CD quhen *bazat* e trapezit dhe i shënojmë me b_1 dhe b_2. Largesën ndërmjet bazave e quajmë *lartësi* e trapezit dhe e shënojmë me h, fig.10.30.

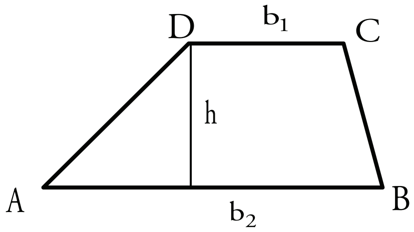


Fig. 10.30

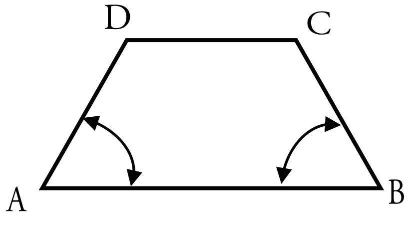


Fig. 10.31

Nëse brinjët joparalele të trapezit kanë gjatësi të barabartë, trapezi quhet *trapez barakrahësh.*
Nëse matni këndet mbi bazat e trapezit barakrahësh, do të vëreni se ato janë kongruente.
Përshkruani vetitë e trapezave në fig.10.32. Nëse matni këndet mbi krahët e cilitdo do trapez, ç'mund të konstatoni?

Shuma e këndeve të trapezit mbi krahët e tij, p.sh. e këndit a dhe δ është 180°. Ngjashëm edhe shuma e këndeve β dhe y është 180°. Kështu përfundojmë se:

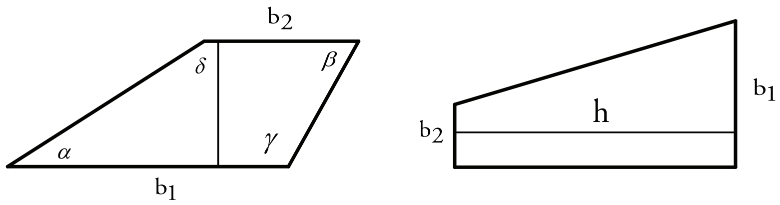


Fig.10.32

Shuma e këndeve mbi çdo krah të trapezit është 180°.

Trapezi në anën e djathtë në figurën 10.32, quhet trapez kënddrejt. Pse?

Shembull 1. Gjeni madhësitë e të gjitha këndeve të trapezit barakrahësh në figurën 10.33.

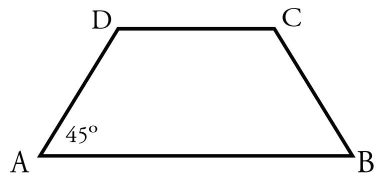


Fig.10.33

Meqenëse trapezi i dhënë është trapez barakrahësh, këndet mbi bazë janë kongruente, prandaj edhe këndi te kulmi B është 45°. E meqë shuma e këndeve mbi çdo krah të trapezit është 180°, përfundojmë se këndet te kulmi C dhe ai D kanë madhësinë 135°.**Shembull 2.** Në trapezin barakrahësh të dhënë në figurën e mëposhtme, vizatoni diagonalet e tij. Matni gjatësitë e tyre. Ç'mund të konstatoni?

Diagonalet e trapezit barakrahësh janë kongruente.

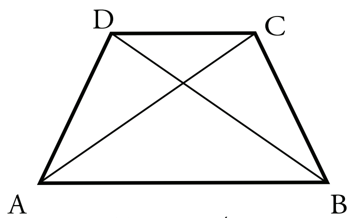


Fig. 10.34

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Vizatoni trapezin kënddrejt, nëse gjatësitë e bazave janë $5cm$ dhe $3cm$, kurse latrtësia $h = 2cm$. Plotësoni vendet e zbrazëta me shenjat S (saktë) apo P (pasaktë), nëse pohimi përkatës është i saktë apo i pasaktë.

- Të gjithë katrorët janë paralelogram ____.
- Të gjithë drejtkëndëshat janë katrorë ____.
- Të gjithë trapezat janë katërkëndësha ____.
- Disa paralelograme janë katërkëndësha ____.

2. Madhësia e ndryshimit të këndeve mbi krahun e trapezit barakrahësh është 60°. Sa janë madhësitë e këndeve të atij trapezi?

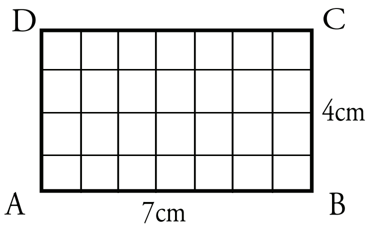
3. Janë dhënë drejtëzat paralele a dhe b, e pikat $A, B \in a$ dhe $C, D, E, F, G \in b$. Sa katërkëndësha mund t'i vizatoni?. Emërtoni secilin prej tyre.

Syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe

Ju do të mësoni:

- të gjeni syprinën e sipërfaqes drejtkëndëshe.

Fjalori: syprinë.
Vizatoni në fletoret me katrorë, nga një drejtkëndësh me perimetër 22cm.
Gjeni syprinën e drejtkëndëshit të vizatuar, duke i numëruar katrorët që e mbulojnë sipërfaqen e tij.
Rezultatet e gjetura, i krahasoni me shokët e grupit.
Ç'mund të konstatoni rreth marrëdhënies së syprinës së sipërfaqes drejtkëndëshe dhe perimetrit të tij?
Le të jetë $ABCD$ njëri prej drejtkëndëshave me perimetër 22cm.
Në fig.10.40 shohim se katrori njësi $1cm^2$ përmbahet 28 herë në sipërfaqen drejtkëndëshe.



Vërejmë se:

$S = 28cm^2 = 7cm \quad 4cm.$

Fig.10.40

Nëse me *a* dhe *b* shënojmë gjatësitë përkatëse të brinjëve të drejtkëndëshit, atëherë:

Syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe

Syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe është e barabartë me prodhimin e gjatësive të brinjëve të tij. Pra: $S = a \cdot b$.

Duke shfrytëzuar formulën për njehësimin e syprinës së sipërfaqes drejtkëndëshe, gjeni syprinat e sipërfaqeve drejtkëndëshe të vizatuara më parë. A fituat rezultatin e njëjtë?
Shembull 1. Dyshemeja e kuzhinës duhet të mbulohet me pllaka qeramike. Nëse gjatësia e kuzhinës është 4.5m kurse gjerësia 3.2m sa metra katrorë pllaka nevojiten për ta mbuluar tërë dyshemenë?

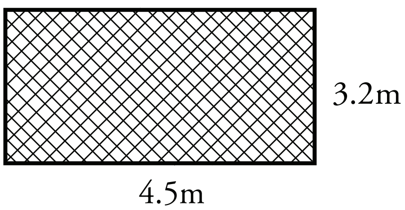


Fig.20.41

Nëse në formulën $S = a \cdot b$ *zëvendësojmë madhësitë e dhëna, do të marrim:*

$$S = 4.5 \cdot 3.2m^2 = 14.4m^2.$$

Pra, për të mbuluar dyshemenë nevojiten 14.4 m^2 pllaka.
Shembull 2. Dhoma e ditës dhe e ngrënies ka formën *L,* si në figurë.
a) Sa metra katror të shtrojës së dyshemesë nevojitet për të mbuluar të dy dhomat?
b) Nëse $1m^2$ e shtrojës kushton 15 € , sa do të kushtojë e gjithë shtroja?

a) *Shqyrtimi*: Çka dini?

- Ju dini dimensionet e dhomave duke lexuar diagramin.
- Çka duhet të gjeni?
- Ju duhet të njehësoni syprinën e sipërfaqes në formën L.

Plani: Për të njehësuar syprinën e sipërfaqes në formën L, së pari duhet zgjidhur një problem më të thjeshtë. E ndajmë figurën L, në dy pjesë X dhe Y. Gjejmë syprinën e sipërfaqeve të ndara dhe pastaj i mbledhim ato.

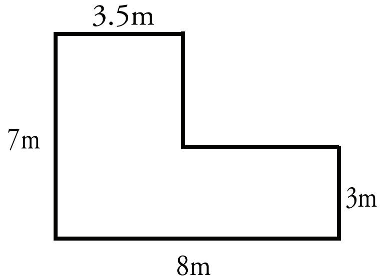


Fig.10.42

Gjejmë syprinën e sipërfaqes X:

$S_1 = a \cdot b$

$S_1 = 3.5 \cdot 4\, m^2$

$S_1 = 14\, m^2.$

Gjejmë syprinën e sipërfaqes Y:

$S_2 = a \cdot b$

$S_2 = 8 \cdot 3\, m^2$

$S_2 = 24\, m^2$

Syprina e përgjithshme është:

$S = S_1 + S_2 = 38\, m^2.$

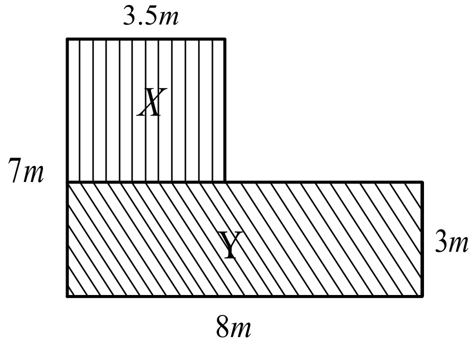


Fig.10.43

Pra, nevojiten $38m^2$ shtrojë për të mbuluar tërë dyshemenë.

b) Meqenëse $1m^2$ kushton 15 €, $38m^2$ të shtrojës do të kushtojnë $15 \cdot 38$ € $= 570$ €.

Shënim. *Kontrolloni zgjidhjen e detyrës, duke zgjedhur ndonjë mënyrë tjetër. Figurën L ndajeni ndryshe dhe pastaj gjeni syprinën e sipërfaqes së dhënë.*

Shembull 3. Është dhënë syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe $S = 391dm^2$. Në qoftë se gjatësia e njërës brinjë është $a = 17dm$, sa është gjatësia e brinjës tjetër të drejtkëndëshit?
Nëse në formulën $S = a \cdot b$ zëvendësojmë madhësitë e dhëna, do të marrim ekuacionin:

$$391dm^2 = 17dm \cdot b,$$

ku b është madhësia e panjohur. Nga barazimi i fundit gjejmë $b = 23dm$

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Vizato një drejtkëndësh në fletoren me katror, syprina e të cilit është 20 njësi katrore.
2. Gjeni syprinën e drejtkëndëshit me dimensionet:

$$a)\quad a=13cm,\quad b=18cm.$$
$$b)\quad a=11.4mm,\quad b=1.7cm.$$
$$c)\quad a=48m,\quad b=\frac{2}{3}a.$$

3. Gjeni syprinën e sipërfaqes së dhënë në figurën 10.44.

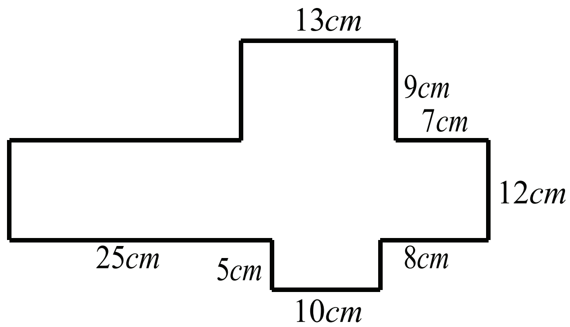
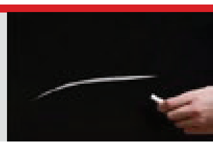


Fig.10.44

4. Kopshti i luleleve në formë drejtkëndëshi me gjatësi 12m dhe gjerësi $9m$ është ndarë në 6 parcela të barabarta për të mbjellë 6 lloje lulesh. Sa është syprina e sipërfaqes së një parcele?
5. Përshkruani së paku tri situate nga jeta e përditshme, ku duhet të gjeni syprinën e sipërfaqes drejtkëndëshe.



Mbledhja e numrave me shenja të kundërta

Shembull 1. Të gjejmë shumën e numrave $(+7)$ dhe (-4). Që të kemi një vështrim më të qartë, në fillim mbledhjen e numrave me shenjë po e paraqesim si zhvendosje të pikave në një bosht numerik. Kështu, numrit $(+7)$ i përgjigjet pika $A(+7)$ në boshtin numerik, që është e larguar nga origjina për 7 njësi. Tash kur pikën $A(+7)$ e zhvendosim për 4 njësi në drejtim negativ, arrijmë në pikën $B(+3)$, e cila ndodhet në të djathtë të origjinës O e larguar për 3 njësi, d.m.th asaj i përgjigjet numri (+3). Pra, shuma e numrave (+7) dhe (–4) është numri 3. Do të shkruajmë:

$$(+7)+(-4)=(+3) \text{ ose } (+7)+(-4)=+(7-4)=3.$$

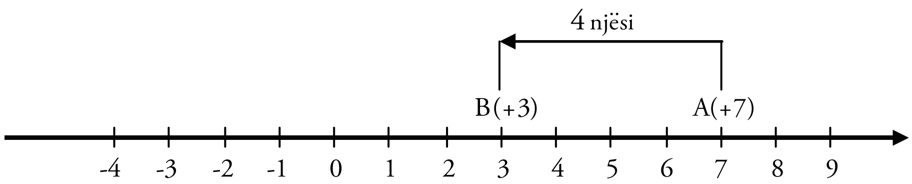


Fig. 2.1

Shembull 2. Të gjendet shuma e numrave $(+3)+(-5)$.

Edhe këtë detyrë do ta zgjidhim me anë të interpretimit në boshtin numerik.

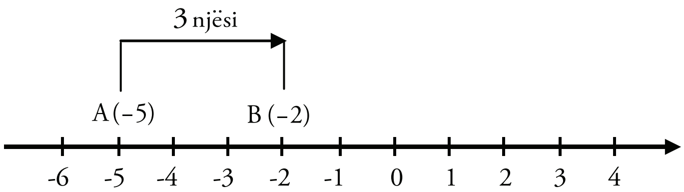


Fig. 2.2

Numrit (-5) i përgjigjet pika $A(-5)$, e cila ndodhet në pjesën negative të boshtit numerik e larguar nga origjina për 5 njësi. Nëse këtë pikë e zhvendosim në drejtim pozitiv për 3 njësi, arrijmë në pikën $B(-2)$, e cila gjithashtu ndodhet në pjesën negative të boshtit numerik e larguar nga origjina për 2 njësi. Pra, shuma e numrave (+3) dhe (-5) është numri (-2). Do të shkruajmë:

$(+3)+(-5)=(-2)$ ose $(+3)+(-5)=-(5-3)=-2.$

Nga shembujt e mësipërm përfundojmë:

Shuma e dy numrave me shenja të ndryshme është pozitive apo negative, varësisht se mbledhori pozitiv është me vlerë absolute më i madh, apo më i vogël se mbledhori negativ.

Shembull 3. Duke u bazuar në përfundimin e mësipërm, mund të shkruajmë:

$a)$ $(+8)+(-6)=+(|+8|-|-6|)=+(8-6)=+2$

$b)$ $(+6)+(-9)=-(|-9|-|+6|)=-(9-6)=-3.$

Përfundimi i nxjerrë më sipër mund të zbatohet edhe për mbledhjen e numrave dhjetorë me shenja të ndryshme.

Shembull 4. $a)$ $(+4.35)+(-2.23)=+(4.35-2.23)=+2.12.$

$b)$ $(-12.72)+(+7.31)=-(12.72-7.31)=-5.41.$

Shembull 5. Në katrorin e mëposhtëm vendosni njërën nga shenjat "<" ose „ > ", në mënyrë që jobarazimi të jetë i saktë:

Në fillim gjejmë shumën $\left(+\frac{1}{1000}\right)+\left(-\frac{1}{100}\right)$ e pastaj e krahasojmë atë me shprehjen në anën e djathtë të katrorit. Meqenëse:

$\left(+\frac{1}{1000}\right)+\left(-\frac{1}{100}\right)=\left(+\frac{1}{1000}\right)+\left(-\frac{10}{1000}\right)=-\frac{9}{1000}$, dhe meqenëse numri $-\frac{9}{1000}$ është më i vogël se $\frac{7}{1000}$

, atëherë në katror duhet ta shënojmë shenjën „ < " .

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Njehsoni shumën e numrave:

$a)$ $(+7)+(-3)$. $b)$ $(-4)+(+15)$. $c)$ $(-10)+(+7)$. $d)$ $(+3)+(-123)$.

2. Të kryhen mbledhjet:

$a)$ $(-4.2)+(+2.3)$. $b)$ $(-95)+(-150)$. $c)$ $(-15.36)+\left(+24\frac{3}{4}\right)$.

$d)$ $(+12.15)+(-24.35)$. $e)$ $(+64.75)+(-89.3)$.

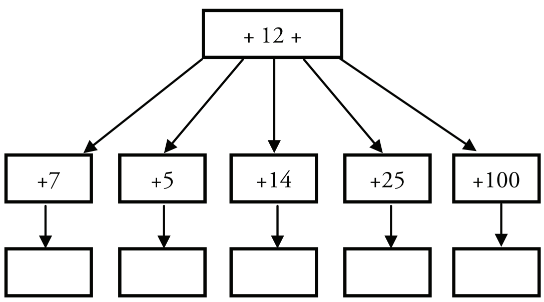
3. Gjeni vlerën e x — it me ndihmën e boshtit numerik:

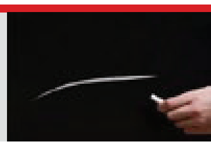
$a)$ $(+3)+x=-7$. $b)$ $(-4)+x=9$. $c)$ $(-4)+x=-7$.

4. Plotësoni tabelën:

			3			
		+1	2			
			1			
−3	−2	−1	+	1	2	3
			−1			
			−2			
			−3		−1	

Plotësoni:





Shuma e këndeve të trekëndëshit

Në trekëndëshin e dhënë në figurë mungon masa e këndit γ. Si mund ta gjeni masën e atij këndi?

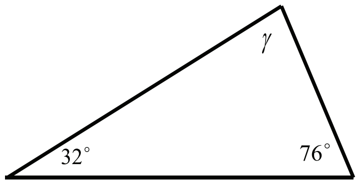


Fig.4.11

Aktiviteti i parë :

- Vizatoni në një letër një trekëndësh të çfarëdoshëm.
- Preni me dorë qoshet e atij trekëndëshi.
- Pjesët e copëtuara të trekëndëshit i renditni njëri pas tjetrit.
- Diskutoni me anëtarët e grupit se çfarë keni vërejtur.

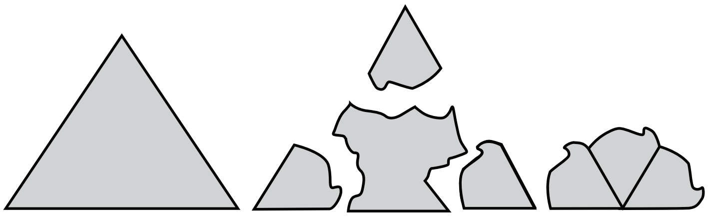


Fig. 4.12

Shuma e këndeve të brendshme të çdo trekëndëshi është 180°.

Shpjegoni figurën: $\omega_1 = \alpha$ dhe $\omega_2 = \beta$. Prej nga: $\alpha + \beta + \gamma = \omega_1 + \omega_2 + \gamma = 180^\circ$

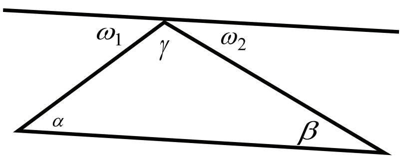


Fig.4.13

Shembull 1. Vizatoni një trekëndësh barakrahësh. Matni këndet e tij me këndmatës. Ç'mund të konstatoni?
Nëse masa e këndit në majë të trkëndëshit barakrahësh është $\gamma = 64^\circ$, sa janë masat e këndeve mbi bazën e atij trekëndëshi?

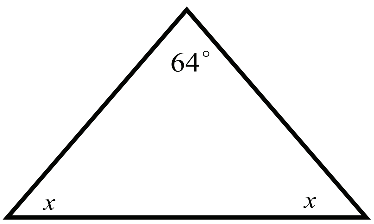


Fig.4.14

Meqë këndet mbi bazë të trekëndëshit barakrahësh janë kongruente dhe shuma e këndeve të trekëndëshit është 180° kemi: $x + x + \gamma = 180^\circ$, ose $2x = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$. Pra :$x = 58^\circ$.

Shembulli 2. Gjatësia e segmentit MC ndryshon si në figurën 4.15. Matni këndet e ΔABC dhe plotësoni tabelën.

$\lvert MC \rvert$	α	β	γ	$\alpha+\beta+\gamma$
1 cm				
2 cm				
3 cm				
4 cm				

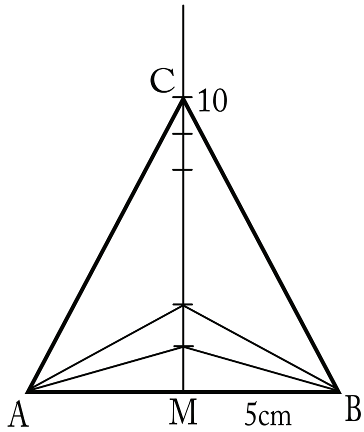


Fig.4.15

Çfarë përfundimi mund të nxirrni?

Aktiviteti i dytë:

Nga fig.4.16, vërejmë se:

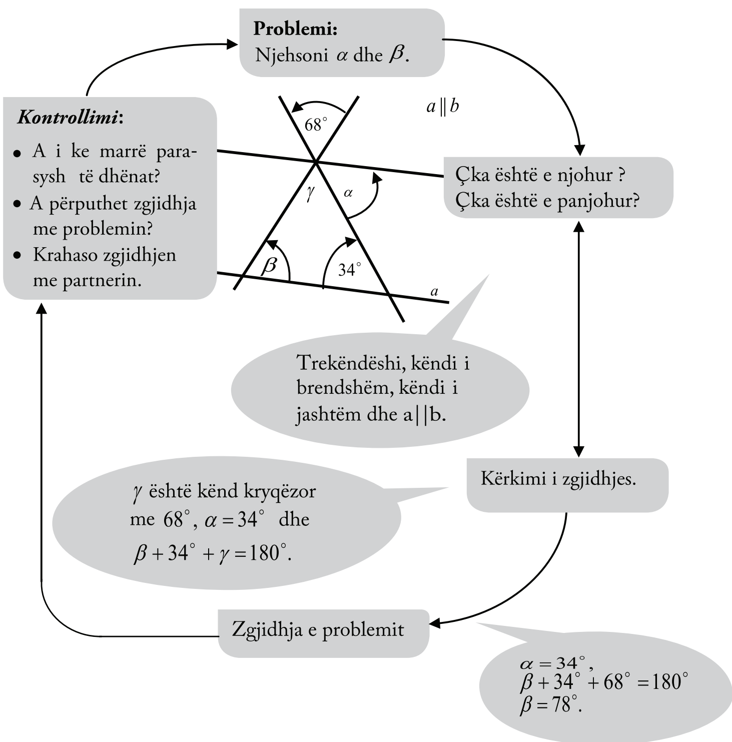
$\alpha+\alpha'=180^\circ$, $\beta+\beta'=180^\circ$ dhe $\gamma+\gamma'=180^\circ$.

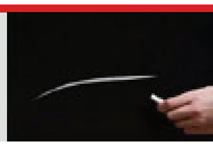
Nëse i mbledhim anë për anë ekuacionet e mësipërme, kemi: $\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'=540^\circ$.

Meqë $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, nga barazimi i mësipërm, kemi: $180^\circ+\alpha'+\beta'+\gamma'=540^\circ$,
Prej nga: $\alpha'+\beta'+\gamma'=540^\circ-180^\circ=360^\circ$

Pra.

Shuma e këndeve të jashtme të çdo trekëndëshi është 360°.





Shembull 3. **Gjeni këndet e panjohura në figurën 4.17.**

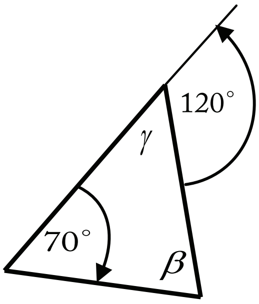


Fig.4.17

Nga figura vërejmë se: $\gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Meqë shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshit është 180°, kemi: $70^\circ + 60^\circ + \beta = 180^\circ$, prej nga $\beta = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Nga shembulli 3 përfundojmë se:

Çdo kënd i jashtëm i një trekëndëshi është i barabartë me shumën e dy këndeve të brendshme jofqinjë me të.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

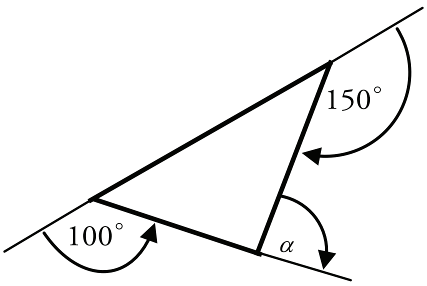


Fig.4.18

1. Gjeni masën e këndeve që mungojnë në trekëndëshin e dhënë në figurën 4.18.

2. Masa e këndit në majë të trekëndëshit barakrahësh është $124^\circ 46' 32''$. Sa janë masat e këndeve të tjera të atij trekëndëshi?

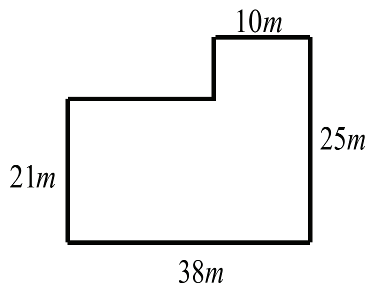
3. Masa e një këndi të brendshëm të trekëndëshit kënddrejt është $37^\circ 13'$. Sa janë masat e këndeve të tjera?

4. Plotësoni tabelën:

TREKËNDËSHI	α	β	γ	α'	β'	γ'
$a)$	30°		38°			
$b)$				81°		123°

Perimetri i sipërfaqeve shumëkëndëshe

Sa metra rrethojë nevojiten për të rrethuar oborrin e shkollës me dimensione si në figurë?
Për të ditur gjatësinë e rrethojës që duhet blerë, së pari duhet të njehsohet perimetri i sipërfaqes shumëkëndëshe. Në klasën e gjashtë e kemi përkufizuar perimetrin e sipërfaqes shumkëndëshe.



Perimetri i sipërfaqes shumëkëndëshe:

Perimetër të sipërfaqes shumëkëndëshe quajmë shumën e gjatësive të brinjëve të saj.

Në fletoren tuaj paraqitni një sipërfaqe pesëkëndëshe *ABCDE*. Matni me vizore gjatësitë e brinjëve të saj. Plotësoni pastaj tabelën:

GJATËSIA E BRINJËS	$\overline{AB}=$	$\overline{BC}=$	$\overline{CD}=$	$\overline{DE}=$	$\overline{EA}=$
SHUMA E GJATËSIVE	$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}=$				

Rezultati i fituar paraqet perimetrin e sipërfaqes pesëkëndëshe *ABCDE.*
Perimetrin do ta shënojmë me P.
Konstruktoni tash një shumëkëndësh të rregullt, p.sh., gjashtëkëndëshin e rregullt me brinjën me gjatësi $3cm$. Ky gjashtëkëndësh përcakton sipërfaqen gjashtëkëndëshe. Perimetri i saj do të jetë:

$$P = 3cm + 3cm + 3cm + 3cm + 3cm + 3cm = \underset{\text{numri i brinjëve}}{6} \cdot \overset{\text{gjatësia e brinjës}}{\overline{3cm}} = \underset{\text{perimetri}}{\underline{18cm.}}$$

Në rastin kur kemi të bëjmë me sipërfaqen n - këndëshe të rregullt, me brinjën me gjatësi a, atëherë perimetri i saj njehsohet me formulën:

$$P = n \cdot a$$

Shembull 1. Kopjoni dhe plotësoni tabelat e mëposhtme për shumëkëndëshat e rregullt:

NUMRIN I BRINJËVE	EMRI I SIPËRFAQES SHUMËKËNDËSHE	PERI-METRI P
3		
4		
5		
6		
8		
10		
12		

NUMRI I BRINJËVE	GJATËSIA E BRINJËS	P
3	3.7cm	
4		24cm
5		18.5cm
6	7cm	
8	32mm	
10		98cm
12	1.4cm	

Shembull 2. Perimetri i paralelogramit $ABCD$ në figurën 7.2 është 168 cm. Njehsoni gjatësitë e brinjëve të tij, nëse gjatësia e njërës brinjë është sa trefishi i brinjës tjetër?
Në paralelogramin $ABCD$ brinjët AB e CD dhe BC e AD kanë gjatësi të barabarta. Prandaj:

$$P = 2 \cdot 3x + 2 \cdot x = 6x + 2x = 8x$$
$$168m = 8x$$
$$x = 21m.$$

Pra, brinjët e paralelogramit kanë gjatësi 21m dhe 63m

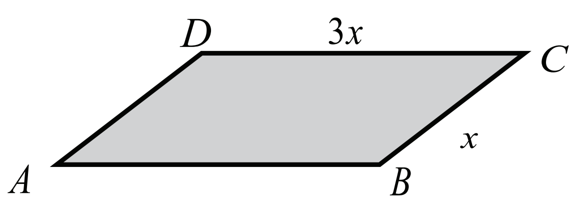


Fig. 7.3

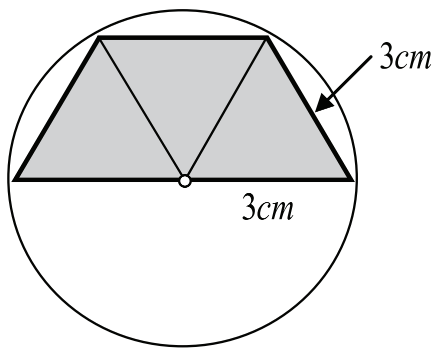


Fig. 7.3

Shembull 3. Në rrethin me rreze 3cm është brendashkruar trapezi barakrahësh. Sa është perimetri i trapezit, në qoftë se gjatësia e njërës bazë është sa diametri i rrethit, kurse e krahut të tij është 3cm?

Nga figura 7.3 shohim se sipërfaqja trapeze mund të ndahet në tri sipërfaqe trekëndëshe barabrinjëse. Prandaj:

$$P = 3cm + 3cm + 3cm + 6cm = 15cm.$$

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Piramida e Keopsit është ndërtuar në vitin 2600 p.e.r. Baza e saj është katrore me gjatësi të brinjës 230.42m. Sa është perimetri i bazës?

2. Njehsoni perimetrin e shumëkëndëshit, kulmet e të cilit janë pikat me koordinata: (0,2), (6,0), (6,7), (5,7), (5,8) dhe (0,8) ?

3. Si do ta ndryshoni formën e sipërfaqes së oborrit të shkollës, pa e ndryshuar perimetrin e saj?

4. Gjeni syprinën e sipërfaqes katrore, nëse gjatësia e perimetrit të tij është:

$a)\ 32cm. \quad b)\ 13\frac{5}{7}m. \quad c)\ 7m3dm2cm.$

5. Sipërfaqja katrore me gjatësi të brinjës $7cm$ dhe sipërfaqja drejtkëndëshe me gjatësi të një brinje $8cm$, kanë gjatësitë e perimetrave të barabarta. Cila sipërfaqe e ka syprinën më të madhe?

6. Njehso shprehjen për perimetrin e sipërfaqes në figurën 7.4.

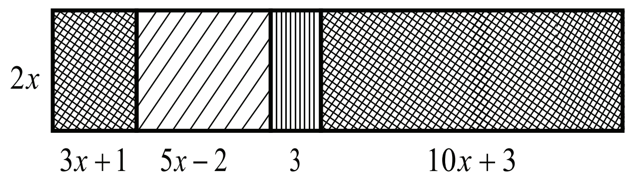
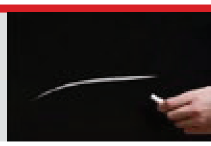


Fig.7.4

7. Vizatoni 5 sipërfaqe të ndryshme shumëkëndëshe, perimetri i të cilave është $7.5m.$



Funksioni

Kuptimi i funksionit

Në jetën e përditshme dhe në matematikë shpesh kemi të bëjmë me lidhshmëri dhe marrëdhenie ndërmjet objekteve të të njëjtit lloj apo te llojeve të ndryshme.Kështu , elementeve të një bashkësie, në njëfarë mënyre ua shoqërojmë elemente të të njëjtës bashkësi apo të ndonjë bashkësie tjetër.Për shembull, çdo nxënësi i caktojmë klasën, secilit mall i caktojmë çmimin, të gjtha faqeve të një libri, numrin përkatës natyror etj.

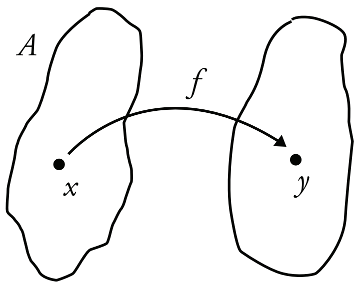
Shembull 1. Paga e Jetonit si instruktor vallëzimi varet nga numri i orëve,sa ai punon.Nëse për një orë Jetoni paguhet 7 euro, sa do të jetë paga e tij për 8 orë, 15 orë, 25 orë ? Në tabelën e mëposhtme është paraqitur lidhja ndërmjet numrit të orëve që ka punuar Jetoni dhe pagës së fituar.

NUMRI I ORËVE (ARGUMENTI, VLERAT HYRËSE) x	RREGULLA (FUNKSIONI) f SHUMËZO PËR 7	PAGA E FITUAR (VLERAT DALËSE y)
8	8 • 7	56
15	15 • 7	105
25	25 • 7	175

Nëse me x shënojmë vlerat hyrëse, kurse me y vlerat dalëse, mund të themi se: çdo vlere x , me anë të rregullës f, i shoqerohet një dhe vetëm një vlerë korresponduese y. Në këtë rast themi se y është një funksion i x-it, meqë vlera e saj varet nga ndryshimi i vlerës se x-it. Shënojmë $y = f(x)$ (lexohet : " y është i barabartë me f prej x-it ").
Vlera hyrëse x quhet ndryshore e pavarur ose argument, ndërsa vlera dalëse y quhet ndryshore e varur ose vlerë e funksionit. Funksioni f mund te paraqitet edhe si bashkësi e dysheve të renditura ($x, f(x)$), ku komponentja e parë x është vlera hyrëse apo ndryshorja e pavarur , kurse komponentja e dytë $y = f(x)$ është vlera dalëse, apo vlera e funksionit f në pikën x .
Kështu , funksioni f në shembullin 1 mund ta shënojmë :

$$f=\{(x,y):y=7fx\} = \{ (8,56),(15,105),(25,175) \}$$

Shembull 2. Syprina e sipërfaqes katrore është funksion i gjatësisë së brinjës së tij.
Shpjegoni.
Nëse shënojmë me A={2,3,4,5} bashkësinë e gjatësive a të brinjëve të katrorit, duke zbatuar formulën për njehsimin e syprinës së sipërfaqes katrore $S = a^2$, bashkësia korrsponduese e vlerave të syprinës është : B={4,9,16,25}.
Kështu, "rregulla e shoqërimit" $S=S(a) = a^2$ është funksion i gjatësisë së brinjës , sepse :
Çdo elementi të bashkësisë A i shoqërohet pikërisht (as më shumë as më pak) një element i bashkësisë B.
Bashkësinë A e quajmë domenë, kurse bashkësinë B kodomenë ose bashkësi vlerash të pasqyrimit f.



Shembull 3. A është çmimi funksion i numrit të artikujve ? Shpjegoni.

NUMRI I ARTIKUJVE (VLERA HYRËSE)	4	9	1	8	4
ÇMIMI (VLERA DALËSE)	2€	4€	0.50€	4€	3€

Katër artikuj mund të kushtojnë 2€, ose 3€ (vlera hyrëse 4, i korrespondojnë më shumë se një vlerë dalëse). Kështu, çmimi nuk është funksion i numrit të artikujve.Shpjegoni tabelën e mëposhtme :

BISCREM	1	2	3	4	5
ÇMIMI	0.75€	1.50€	2.25€	3.00€	3.00€

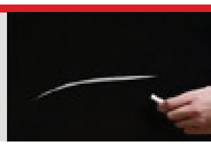
Shembull 4. Cila është "rregulla e mundshme" për vlerat e dhëna në tabelë ?
Shkruani formulën përkatëse.

VLERA HYRËSE x	VLERA DALËSE y
11	5
0	-6
-5	-11
6	0

Së pari duhet të studiojmë lidhjen ndërmjet vlerave hyrëse x dhe atyre dalëse y .

$11 - 6 \rightarrow 5$ $\quad$ $-5 - 6 \rightarrow -11$
$0 - 6 \rightarrow -6$ $\quad$ $6 - 6 \rightarrow 0$

Vlerat dalëse janë: "$y = x - 6$", prandaj "rregulla-funksion" është "$x - 6$ ".
Shënojmë: $f(x) = x - 6$.



Shembull 5. A paraqesin funksione bashkësitë e dysheve të renditura:

f={(1,2), (3,4), (-4,8),(0,-5)}.
g={(1,3), (-4,3), (9,3), (0,2)}.
h= {(3,0), (2,9), (3,-1),(-1,7)}.

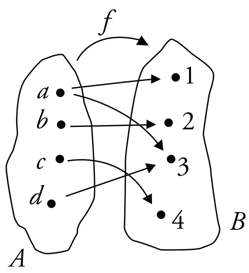
f është funksion, sepse nuk ekzistojnë dyshe të renditura që kanë të njëjtën komponente të parë.

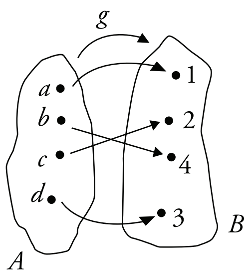
g është funksion, sepse nuk ekzistojnë dyshe të renditura që kanë të njëjtën komponente të parë. Në bashkësinë g janë tri dyshe të renditura, që kanë të njëjtën komponente të dytë, por kjo gjë nuk është kusht i domosdoshëm në përkufizimin e funksionit.

h nuk është funksion, sepse dyshet (3,0) dhe (3,-1) i kanë komponentet e para të njëjta, e ato të dyjat të ndryshme.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Cili nga diagramet e mëposhtme paraqet funksion ?





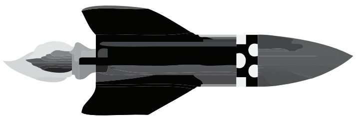
2. Pse rregulla “rrumbullakëso numrin në një shifër dhjetore” është funksion, kurse rregulla “rrumbullakëso numrin” nuk mund të jetë funksion?

3. Zbulo “rregullën - funksion” :

Ju thoni	3	5	6	10
Unë them	8	24	35	99

Ju thoni	5	7	9	11
Unë them	9	13	17	21

4. Cila situatë nuk përshkruan funksionin ?



1. Gjatësia e rrugës për shpejtësinë e caktuar.
2. Gjatësia e rrugës për kohën e caktuar.
3. Gjatësia e rrugës për moshën e komanduesit.
4. Të gjitha janë funksione

5. A është syprina e sipërfaqes rrethore funksion i gjatësisë së diametrit?

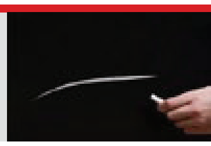
6. Një fishekzjarr është lëshuar nga toka.Në tabelën e mëposhtme është treguar lidhja ndërmjet rrugës që përshkon fishekzjarri dhe kohës.Shpjegoni nëse lidhja e tillë paraqet funksion.

Koha (sec)	0	1	2	3	4	5
Lartësia (m)	0	20	30	30	20	0

7.A paraqesin funksione bashkësitë e dysheve të renditura:

f = {(1,2),(2,3),(-1,6),(8,3)}.
g={(-3,1),(1,1),(-7,1),(0,1)}.
h={(x,y):y=3x-4, x ∈ {-2,-5,0,6}}.

8. Gjeni tre shembuj me të dhëna si në detyrën 6, e pastaj shqyrtoni nëse ato paraqesinfunksione.Diskutoni në klasë rezultatet e gjetura.



Numrat dhjetorë dhe numrat thyesorë

Më herët kemi mësuar se çdo numër thyesor ndryshe mund të shkruhet si numër dhjetor me disa numra pas pikës dhjetore.
Më poshtë po i paraqesim disa thyesa si numra dhjetorë:

$$\frac{2}{5}=0.4,\quad \frac{7}{2}=3.5,\quad \frac{3}{4}=0.75,\ \text{dhe}\ \frac{2}{11}=0.181818....$$

Vërejmë se në shembullin e fundit gjatë pjesëtimit të numëruesit 2 me emërue-sin 11, shifrat pas pikës dhjetore përsëriten pandërprerë. Pra

$$\frac{2}{11}=2:11=0.181818\cdots$$

Numrin dhjetor $0.181818\cdots$ e quajmë *numër dhjetor periodik*. Në këtë rast *perioda* është 18 . Do të shkruajmë:

$$\frac{2}{11}=0.181818\cdots=0.(18).$$

Shembull 1. Paraqitja e thyesës $\frac{1}{27}$ si numër dhjetor është 0.037037037…. (provoni duke pjesëtuar numrin 1 me 27). Meqenëse 0.037037037… është numër dhjetor periodik me periodë 037, atë e shkruajmë 0.(037). Pra: $\frac{1}{27}=0.(037)$.

Shembull 2. Të shkruajmë si numër dhjetor thyesën $\frac{27}{55}$.

Duke pjesëtuar numëruesin me emëruesin e thyesës së dhënë, gjejmë se:

$$\frac{27}{55}=27:55=0.4909090\cdots$$

Vërejmë se numri i parë pas pikës dhjetore është 4, kurse pas tij numri 90 përsëritet periodikisht. Në këtë rast numrin 4 e quajmë *paraperiodë* të numrit dhjetor 0.4909090..., kurse 90 është periodë e tij. Do të shkruajmë:

$$\frac{27}{55}=0.4909090\cdots=0.4(90).$$

Në bazë të këtyre shembujve mund të përfundojmë:

Paraqitja e thyesës si numër dhjetor:

Çdo numër thyesor mund të shënohet si numër dhjetor me një numër të fundmë shifrash pas pikës dhjetore (në këtë rast numri dhjetor quhet numër i fundmë dhjetor) ose si numër dhjetor periodik.

Në vazhdim do të shohim problemin e anasjelltë. Pra, do të shohim se si një numër dhjetor periodik shndërrohet në thyesë.

Shembull 3. Shkruani si numra thyesorë këta numra periodikë:

$a)$ $0.222\cdots.$ $b)$ $0.131313\cdots.$ $c)$ $342342342\cdots.$

$a)$ Shënojmë me $x=0.222\cdots$. Duhet të gjejmë një thyesë të formës $\frac{p}{q}$ të tillëu që $x=\frac{p}{q}$. Për këtë të dy anët e barazimit $x=0.222\cdots$ i shumë-zojmë me numrin 10 dhe kemi

$$\begin{aligned}
10x &= 10\cdot 0.222\cdots\\
10x &= 2.222\cdots\\
10x &= 2+0.222\cdots\\
10x &= 2+x\\
10x-x &= 2\\
9x &= 2\\
x &= \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Pra , $0.222\cdots=\frac{2}{9}$.

$b)$ Shënojmë me I shumëzojmë të dy anët e barazimit $x=0.131313\cdots$. me 100, kemi:

$$\begin{aligned}
100x &= 100\cdot 0.131313\cdots\\
100x &= 13.131313\cdots\\
100x &= 13+0.131313\cdots\\
100x &= 13+x\\
100x-x &= 13\\
99x &= 13\\
x &= \frac{13}{99}.
\end{aligned}$$

Pra $0.131313\cdots=\frac{13}{99}$

$c)$ Të dy anët e barazimit $x=0.342342342\cdots$ i shumëzojmë me 1000, kemi:

$$\begin{aligned}
1000x &= 1000\cdot 0.342342342\cdots\\
1000x &= 342.342342342\cdots\\
1000x &= 342+0.342342342\cdots\\
1000x &= 342+x\\
999x &= 342\\
x &= \frac{342}{999}.
\end{aligned}$$

T'i vërejmë edhe një herë barazimet e gjetura më sipër:

$$0.222\cdots=\frac{2}{9},\quad 0.131313\cdots=\frac{13}{99},\qquad 0.342342342\cdots=\frac{342}{999}.$$

Vërejmë se në secilin nga rastet e shqyrtuara më sipër në numëruesin e thyesës së fituar paraqitet perioda e numrit dhjetor, kurse në emërues paraqitet numri që ka aq 9-she sa shifra ka perioda.
Nëse te një numër dhjetor, perioda fillon pas pikës dhjetore, atë e quajmë *numër të pastër dhjetor periodik.*
Numrat e plotë janë numra të pastër periodikë (pse?).
Në vazhdim po e nxjerrim një formulë për shndërrimin e numrave të pastër periodikë në thyesa. Le të jetë $x = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots = 0.(a_1a_2a_3\cdots a_n)$ një numër i pastër dhjetor periodik.
Duke shumëzuar të dy anët e barazimit $x = 0.a_1a_2a_3\ldots a_n\cdots$ me 10^n kemi:

$$10^n\cdot x = 10^n\cdot 0.\,a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$
$$10^n\cdot x = a_1a_2a_3\cdots a_n\,.\,a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$
$$10^n\cdot x = a_1a_2a_3\cdots a_n + 0.\,a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$
$$10^n\cdot x = a_1a_2a_3\cdots a_n + x$$
$$\left(10^n - 1\right)x = a_1a_2a_3\cdots a_n$$
$$x = \frac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{10^n - 1}.$$

Në vazhdim do të shqyrtojmë rastet kur numri dhjetor nuk është i pastër periodik. Numrat dhjetorë që kanë paraperiodë, quhen *numra dhjetorë të përzier periodikë.*
Shembull 4. Shkruani si thyesë numrin dhjetor $0.5262626\cdots$.
Shënojmë me $x = 0.5262626\ldots$. Duke shumëzuar barazimin e fundit me 10, kemi:

$$10\cdot x = 5.262626\cdots$$
$$10\cdot x = 5 + 0.262626\cdots$$
$$10\cdot x = 5 + \frac{26}{99}$$
$$10\cdot x = \frac{5\cdot 99 + 26}{99}$$
$$10\cdot x = \frac{5\cdot(100-1) + 26}{99}$$
$$10\cdot x = \frac{500 - 5 + 26}{99}$$
$$x = \frac{526 - 5}{990}.$$

Shënim: *Në barazimin e fundit numri* 5 *është paraperioda, kurse* 26 *është perioda e numrit dhjetor* $0.5262626\cdots$.

Në bazë të shembujve të më sipërm përfundojmë.

Paraqitja e numrave dhjetorë si thyesa:

Të gjithë numrat e fundmë dhjetorë dhe numrat dhjetorë periodikë mund të shkruhen si numra thyesorë.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Tregoni se numri 7 është periodë, kurse numri 21 është paraperiodë gjatë kthimit të thyesës $\frac{49}{225}$ në numër dhjetor.

2. Shkruani si numra dhjetorë këto thyesa:

$a)\ \frac{4}{5}.\quad b)\ \frac{3}{5}.\quad c)\ \frac{3}{4}.\quad d)\ \frac{3}{25}.\quad e)\ \frac{7}{4}.\quad f)\ \frac{23}{20}.$

3. Shkruani si numra dhjetorë këto thyesa:

$a)\ \frac{1}{3}.\quad b)\ \frac{5}{3}.\quad c)\ \frac{5}{6}.\quad d)\ \frac{55}{6}.\quad e)\ \frac{3}{27}.\quad f)\ \frac{133}{99}.$

4. Shkruani si thyesa këta numra dhjetorë:

$a)\ 1.333\cdots.\quad b)\ 0.212121\cdots.\quad c)\ 213213213\cdots.$

Simetria boshtore

Në figurën 4.5 vëreni formën F, e cila i ngjan siluetës së një elefanti. Në qoftë se formën F e shikoni në pasqyrë, duke vendosur pasqyrën në “vijën e pasqyrës”, të cilën e kemi shënuar me *s*, do të shihni në të formën F. Merrni një pasqyrë dhe provoni këtë!
Forma F′ paraqet pasqyrimin, lidhur me “vijën e pasqyrës” të formës F. Këtë lloj pasqyrimi e quajmë ndryshe edhe reflektim, ndërsa “vijën e pasqyrës” e quajmë vijë të reflektimit.

Shikoni pikën P dhe pikën P′ në të cilën është pasqyruar pika P. Sa është distanca e pikës P′ nga vija e reflektimit? Çfarë këndi formon segmenti P′ me vijën e reflektimit?

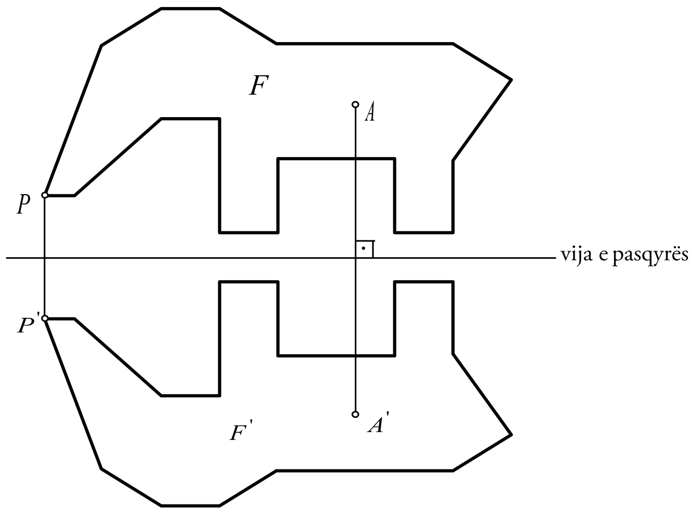


Fig. 4.5

Për secilën pikë A të formës F ekziston pika korresponduese A' në formën F′ Pikat A dhe A' ndodhen në anë të ndryshme të drejtëzës së reflektimit s dhe janë barabar të larguara nga ajo. Me fjalë të tjera, segmenti A′ e ndërpren vijën e reflektimit s në një pikë S të tillë që $SA = SA'$ dhe A′ është normal në drejtëzën s. Pra, drejtëza s është simetrale e segmentit AA'. Për figurat F dhe F themi se janë simetrike lidhur me një drejtëz s, në qoftë se secilës pikë A të njërës figurë i përgjigjet pika A' në figurën tjetër, ashtu që drejtëza s të jetë simetrale e segmentit AA'. Drejtëzën s e quajmë drejtëz ose bosht simetrie.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Në fletoren me katrorë vizatoni sistemin e koordinatave dhe boshtin e simetrisë $_s$ si në fig.4.6. Në sistemin e

tillë paraqitni pikat $A(11,7)$, $B(11,5)$, $C(6,5)$, $D(6,1)$, $E(11,1)$, $F(13,7)$ dhe $G(12,11)$. Pika A' paraqet pikën simetrike të pikës A, lidhur me drejtëzën e simetrisë s. Çfarë këndi formon s me segmentin AA'? Konstruktoni pikat simetrike të pikave tjera B, C, D, E, F dhe G. Ç’mund të thuhet për formën dhe për madhësinë e figurave $ABCDEFG$ dhe $A'B'C'D'E'F'G'$? Gjeni edhe koordinatat e pikave $A'B'C'D'E'F'$ dhe G'.

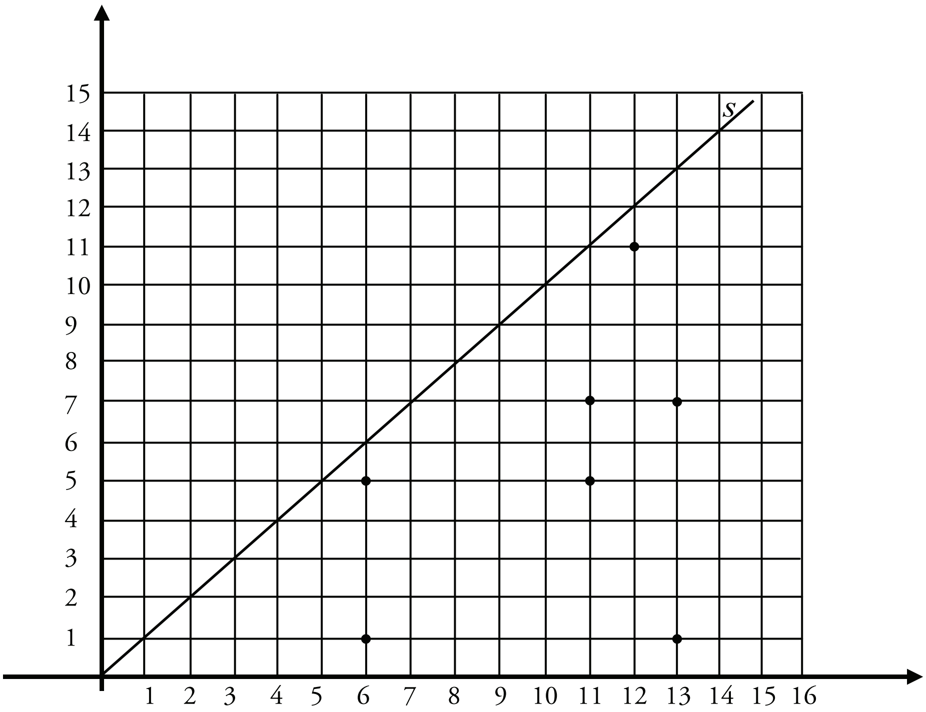


Fig.4.6

2. Kopjoni në fletoren me katrorë figurën 4.7. Për secilën formë të paraqitur konstruktoni figurën simetrike lidhur me drejtëzën *s*. Ç'mund të thuhet për formën dhe madhësinë e figurave simetrike? Plotësoni pastaj fjalinë:

Figurat A dhe A', B dhe____, ____ dhe C' dhe D dhe ____ kanë formën dhe ________________ e njëjtë.

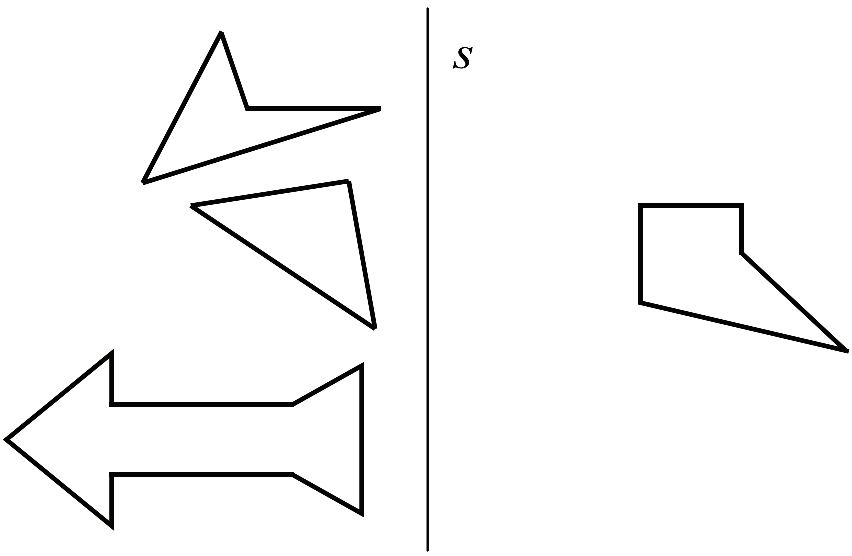


Fig.4.7

Llogaritja e probabiliteteve

Në figurën 25.1. shihen format e 10 ëmbëlsirave të cilat i ka blerë Nita për ditëlindje. Ëmbëlsirat kanë qenë të mbyllura në një arkë.

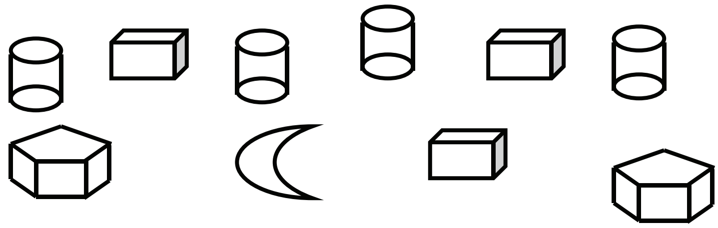
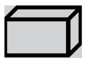
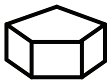


Fig.6.1.

Nita më së shumti e do  . Ajo e ka nxjerrë një ëmbëlsirë nga arka. Proba-biliteti për ta nxjerrë  është 1 në 10. Probabiliteti 1 në 10, sikurse dihet, mund të shkruhet $\frac{1}{10}$, si thyesë apo 0.1 si numër dhjetor.

Probabiliteti që Nita të nxjerrë nga arka  është $\frac{3}{10}$ apo 0.3.

Probabiliteti që Nita të nxjerrë nga arka  është $\frac{2}{10}$ apo 0.2.

Probabiliteti që Nita të nxjerrë një ëmbëlsirë në formë cilindrike është $\frac{5}{10}$ ose 0.5.

Probabiliteti që Nita të nxjerrë një mollë nga arka është 0, sepse është i pamundshëm (në arkë nuk ka mollë).
Probabiliteti që Nita të nxjerrë një ëmbëlsirë nga arka është 1, sepse është ngjarje e sigurt.
Paraqitni probabilitetet e llogaritura nga Nita në një shkallë probabiliteti.
Në figurën 25.2 shihet një lloj ruleti për lojëra me fat. Kur në të rrokulliset një top i vogël, ai do të ndalet në njërën prej tetë fushave të ruletit. Cili është probabiliteti që topi të ndalet në një fushë me numër më të vogël se 6?
Në ruletë janë 5 numra më të vegjël se 6. Ata janë numrat 1,2,3,4 dhe 5. Nga ana tjetër, ruleti ka 8 faqe. Probabiliteti që topi të ndalet në njërin prej numrave fushave 1,2,3,4 ose 5 është 5 në 8 dhe shkruhet $\frac{5}{8}$. Cili është probabiliteti që topi të ndalet:

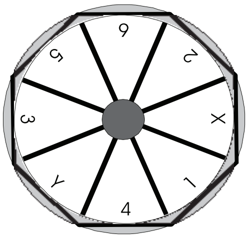
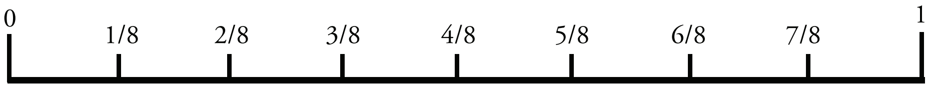


Fig.6.2.

A: Në cilindo numër.
B: Në numrin 9.
C: Në një shkronjë.
D: Në shkronjën Y.
E: Në një shkronjë ose në një numër.
F: Në një numër çift.
G: Në një shkronjë ose në një numër tek.

Shkruani probabilitetet e fituara prej A deri në E në shkallën e poshtme të probabiliteteve:



DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Eksperimenti është bërë duke hedhur dy monedha njëkohësisht. Cila është bashkësia e të gjitha realizimeve të mundshme të eksperimentit? Janë gjithsej 4 realizime. Gjeni ato, duke plotësuar tabelën:

REALIZIMI		MONEDHA E PARE	
		H	J
MONEDHA E DYTË	H		H, J
	J		

Gjeni probabilitetet nga detyra 1, për këto ngjarje:

A: Bien dy H.
B: Bien dy J.
C: Bie një H dhe një J.

3. Duke u mbështetur në detyrën 1 formoni një tabelë dhe gjeni pastaj të gjitha realizimet e eksperimentit të rrokullisjes së zarit dhe të hedhjes së monedhës Gjeni pastaj probabilitetet e ngjarjeve:

A: Bie H dhe numri 5.
B: Bie H dhe një numër.
C: Bie J dhe një numër çift.

1. Janë dhënë ngjarjet:

A: Sot do ta takosh në Prishtinë një luan me dy koka.
B: Pas natës vjen dita.

Plotësoni fjalitë:

A është ngjarje ____________________. Prandaj $P(A) =$ ____.

B është ngjarje __________________. Prandaj $P(B) =$ ______.

2. Nga arka e cila i përmban dy topa, një të bardhë e një të zi, nxirret rastësisht një top. Konsiderojmë ngjarjen: *C: Është nxjerrë topi i bardhë.* Plotësoni fjalinë:

C është ngjarje me _________________________. Prandaj $P(C) = \frac{1}{2}$.

3. Nga arka e cila përmban dhjetë topa, prej të cilëve 7 janë të kuq e 3 të bardhë, nxirret rastësisht një top. Cili është probabiliteti që topi i nxjerrë të jetë top i kuq?

4. Nga arka e cila përmban dhjetë topa, prej të cilëve 7 janë të kuq e 3 të bardhë, nxirret rastësisht një top. Cili është probabiliteti që topi i nxjerrë të jetë top i bardhë?

5. Shkruani si thyesa dhe si dhjetore probabilitetet e ngjarjeve:
A : *Çdo i dyti nxënës luan futboll.*
B : 1 *në çdo* 4 *llamba elektrike është defekte.*
C : 56 *nga* 100 *lexues të gazetave lexojnë gazetën* ***Koha ditore***.
Ç : 7 *nga* 10 *studentë dëgjojnë çdo ditë muzikë.*
D : 1 *në çdo* 10 *djem merret me karate.*
6. Në tabelën e poshtme është paraqitur anëtarësia e një klubi të rinjsh.

	MË TË RINJ SE 13 VJEÇ	13 VJEÇ E MË TEPËR
Vajza	20	15
Djem	18	22

a) Sa anëtarë ka klubi?
b) Një person është zgjedhur rastësisht. Cili është probabiliteti që ai të jetë:
(1) Djalë.
(2) Person 13 apo më i madh se 13 vjeç.
(3) Vajzë mbi 13 vjeç.

Prodhimet e veçanta

Janë disa prodhime të veçanta binomesh, të cilat paraqiten shumë shpesh në shembuj praktikë.

Katrori i binomit: Shohim prodhimin $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$.
Zbatojmë rregullën e shumëzimit të polinomit me polinom, kemi:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

Duke mbledhur monomet e ngjashme marrim barazimin:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Formula e fundit quhet formulë e katrorit të binomit, ose ndryshe, *katrori i shumës.*
Ngjashëm, po të shohim prodhimin: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$.
Zbatojmë rregullën e shumëzimit të polinomit me polinom, kemi:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2,$$

ose

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Shprehja e fundit quhet *katrori i ndryshimit.*

Katrori i binomit:

Për çdo dy numra a dhe b vlen :

$1^\circ\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – katrori i shumës.
$2^\circ\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – katrori i ndryshimit.

Duke e quajtur termin a i pari, kurse termin b i dyti, formulat e mësipërme lexohen kështu:

1° I pari në katror, plus dyfishi i të parit herë i dyti, plus i dyti në katror.
2° I pari në katror, minus dyfishi i të parit herë i dyti, plus i dyti në katror.

Vërtetimi gjeometrik i formulës $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Le të shënojmë me S syprinën e sipërfaqes së katrorit me brinjën $a+b$. Atëherë $S = (a+b)^2$. Nga ana tjetër, sipas figurës 7.1, kemi:
$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Meqenëse $S_1 = a^2$, $S_2 = a \cdot b$, $S_3 = a \cdot b$ dhe $S_4 = b^2$, pas zëvendësimit në barazimin $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, kemi:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ngjashëm mund të bëni një vërtetim gjeometrik edhe për formulën: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Shembull 1. Duke zbatuar formulën për katrorin e binomit gjejmë:

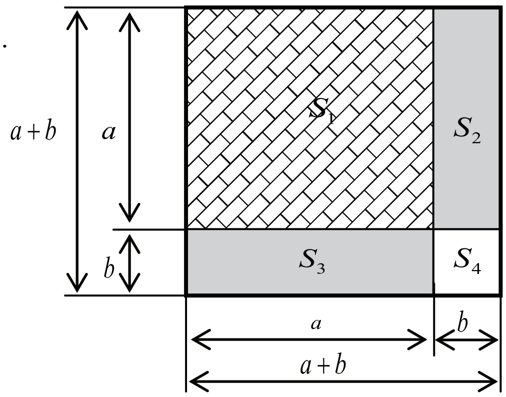


Fig.7.1

1) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$

2) $(2x-y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2.$

3) $(4a-3b)^2 = (4a)^2 - 2[(4a)(3b)] + (3b)^2$

$= 16a \;\; - 24ab + 9b^2.$

Ndryshimi i katrorëve. Shohim prodhimin $(a+b)(a-b)$. Duke kryer shumëzimin, marrim:
$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$
Formula e fituar $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ quhet *ndryshimi i katrorëve.*

Ndryshimi i katrorëve:

Për dy numrat realë a dhe b vlen :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Duke e quajtur termin a i pari, kurse termin b i dyti, formulën për ndryshimin e katrorëve e lexojmë kështu:
I pari plus i dyti herë i pari minus i dyti është i barabartë me të parin në katror minus të dytin në katror.

Vërtetimi gjeometrik i formulës $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$
Nga figura 7.2, vërejmë se $S_1 + S_2 = (a+b) \cdot (a-b)$, kurse nga figura 7.3, vërejmë se $a^2 - b^2 = S_1 + S_2$.
Prej nga $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b).$

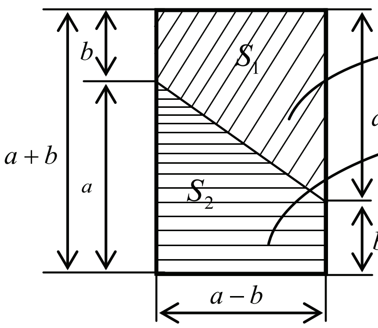


Fig.7.2

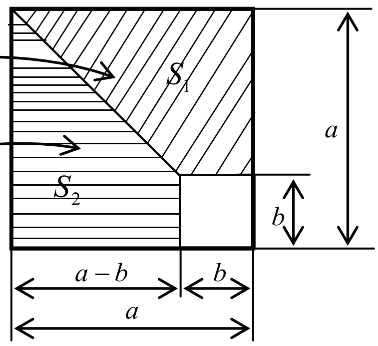


Fig.7. 3

Shembull 2. Duke zbatuar formulën për ndryshimin e katrorëve, kemi:

1) $(x+5)(x-5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

2) $(2a+b)(2a-b) = (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2.$

Para se të bëjmë shumëzimin e dy polinomeve, është e dobishme të shihet nëse prodhimi i polinomeve paraqet ndonjërin nga prodhimet e veçanta, të cilat i mësuam më lart. Nëse po, zbatohet rregulla përkatëse, e nëse jo, shumëzimi i polinomeve bëhet duke shumëzuar secilin term të polinomit të parë në prodhim me secilin term të polinomit të dytë.

Shembull 3. Thjeshtojmë shprehjen: $(a+3)(2a^2-a+4)$.
Kemi:

$$\begin{aligned}(a+3)(2a^2-a+4)\\ &=(a)(2a^2)+(a)(-a)+(a)(4)+(3)(2a^2)+(3)(-a)+(3)(4)\\ &=2a^3-a^2+4a+6a^2-3a+12\\ &=2a^3+5a^2+a+12.\end{aligned}$$

Shembull 4. Thjeshtojmë shprehjen:

$(x+y)(x+2y)(x-y)$.

Kur shumëzojmë më shumë se dy polinome, zbatojmë vetinë asociative të shumëzimit. Kështu, shumëzojmë cilatdo dy prej polinomeve, pastaj prodhimin e tyre e shumëzojmë me polinomin e tretë. Në rastin konkret së pari shumëzo-jmë dy polinomet e para, pastaj prodhimin e shumëzojmë me polinomin e tretë.

$$\begin{aligned}(x+y)(x+2y)(x-y)&=(x^2+2xy++xy+2y^2)(x-y)\\ &=(x^2+3xy+2y^2)(x-y)\\ &=x^3-x^2y+3x^2y-3xy^2+2xy^2-2y^3\\ &=x^3+2x^2y-xy^2-2y^3.\end{aligned}$$

Shënim: *Detyrën e mësipërme mund ta zgjidhim më thjesht duke zbatuar së pari vetinë komutative të shumëzimit te faktori i dytë dhe i tretë, e pastaj vetinë asociative. Më tutje veprimet e tjera janë ato të zakonshmet për shumëzimin e polinomeve.*

$(x+y)(x+2y)(x-y)$

zbatojmë vetinë komutative të shumëzimit të faktorit të dytë dhe të tretë

$$\begin{aligned}&=(x-y)(x+y)(x+2y)\\ &=[(x-y)(x+y)](x+2y)\\ &=(x^2-y^2)(x+2y)=x^3+2x^2y-xy^2-2y^3.\end{aligned}$$

Shembull 5. Të njehsojmë $(a+2b)^3$.

$$\begin{aligned}(a+2b)^3&=(a+2b)(a+2b)(a+2b)=(a+2b)(a+2b)(a+2b)\\ &=[(a)^2+4ab+4b^2](a+2b)\\ &=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3\end{aligned}$$

Ndryshimi i kubeve: Shqyrtojmë prodhimin $(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Po të liro-hemi nga kllapat në shprehjen e fundit marrim:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3,$$

d.m.th. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Ndryshimi i kubeve:

Për çdo dy numra a dhe b vlen:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Duke konsideruar termin a si i pari, ndërsa termin b si i dyti, lexojmë:

$$(i\ pari)^3 - (i\ dyti)^3 = (i\ pari - i\ dyti)[(i\ pari)^2 + (i\ pari)(i\ dyti) + (i\ dyti)^2]$$

Shembull 6. Të faktorizojmë polinomin $40x^3 - 135y^3$. Kemi:

$$\begin{aligned} 40x^3 - 135y^3 &= 5(8x^3 - 27y^3) \\ &= 5[(2x)^3 - (3y)^3] \\ &= 5(2x-3y)[(2x)^2 + (2x)(3y) + (3y)^2] \\ &= 5(2x-3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2). \end{aligned}$$

zbatojmë formulën për

Shuma e kubeve: Shqyrtojmë prodhimin $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Po të liro-hemi nga kllapat marrim:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3,$$

d.m.th. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Shuma e kubeve:

Për çdo dy numra a dhe b vlen:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Duke konsideruar termin a si i pari, ndërsa termin b si i dyti, lexojmë:

$$(i\ pari)^3 + (i\ dyti)^3 = (i\ pari + i\ dyti)[(i\ pari)^2 - (i\ pari)(i\ dyti) + (i\ dyti)^2]$$

Shembull 7. Duke zbatuar formulën për shumën e kubeve, kemi:

1) $$\begin{aligned} x^3 + 27 &= (x)^3 + (3)^3 = (x+3)[(x)^2 - (x)(3) + (3)^2 \\ &= (x+3)(x^2 - 3x + 9). \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 8x^3 + y^9 &= (2x)^3 + (y^3)^3 \\ &= (2x + y^3)[(2x)^2 - (2x)(y^3) + (y^3)^2 \\ &= (2x + y^3)(4x^2 - 2xy^3 + y^6). \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} a^3b^3 + 27c^3 &= (ab)^3 + (3c)^3 \\ &= (ab + 3c)[(ab)^2 - (ab)(3c) + (3c)^2 \\ &= (ab + 3c)(a^2b^2 - 3abc + 9c^2). \end{aligned}$$

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

Duke zbatuar formulat për shumëzimet e veçanta, njehësoni:

1. a^2-49.

2. $4a^2-25b^2$.

3. $36x^2-y^4$.

4. x^4-4.

5. $16a^2-49b^2$.

6. $144x^2-121y^2$.

7. $8a^2-32b^2$.

8. $3x^2-27y^2$.

9. $50-2x^2$.

10. $128a^2-2b^2$.

11. $98a^2b^2-50x^2y^2$.

12. x^4-y^4.

13. a^4-81.

14. x^4-16y^4.

15. $a^{2n}-1$.

16. $a^{2n}-4$.

17. $x^{4n}-25$.

18. $x^{2n}-y^{2n}$.

19. $x^{4n}-16$.

20. $x^{4n}-81$.

21. $a^2(x+2y)-b^2(x+2y)$.

22. $4x^2(a+5b)-y^2(a+5b)$.

23. $2a^2(x+y)-8b^2(x+y)$.

24. $3a^2(3x-y)-27(3x-y)$.

25. $4a(x^2-y^2)-8b(x^2-y^2)$.

26. $9x(4a^2-b^2)-3y(4a^2-b^2)$.

27. $(a+b)^2-(x-y)^2$.

28. $(2a+b)^2-(x-2y)^2$.

29. $(2x-y)^2-(x+y)^2$.

30. $(3a-b)^2-(2a-b)^2$.

31. $(4x+3y)^2-(4x-2x)^2$.

32. $27a^3-b^3$.

33. $8y^3-27$.

34. x^3+y^3.

35. $27+x^3$.

36. a^3+8b^3.

37. $64a^3+b^3$.

38. $8y^3-27x^3$.

39. $64a^3-8$.

40. $81a^3-3b^3$.

41. $2a^3+16$.

42. $3x^3+24$.

43. $2a^3-16$.

44. $64z^3+125$.

45. $a^5+27a^2b^3$.

46. $2a^3-54b^3$.

47. $8x^2y^3-x^5$.

48. $54y^3+2z^3$.

49. $3x^5-81x^2y^3$.

50. $a^3b^9-c^{15}$.

51. $x^3y^{12}+z^9$.

52. $a^{18}b^9-27c^3$.

53. $3x^3y^6+81z^3$.

54. $(a+2b)^3-c^3$.

55. $(x+3y)^3+z^3$.

56. $(2a-b)^3+8c^3$.

57. $(4a+b)^3-27c^3$.

58. $(2a+b)^3-(x-y)^3$.

Zgjidhja e problemeve me ekuacione

Shumë probleme në jetën e përditshme i hasim të shkruara me fjalë ose vetëm të shprehura verbalisht. Për zgjidhjen e tyre më parë është e domosdoshme të bëhet *përkthimi* i tyre në gjuhën e algjebrës, d.m.th. shprehja e tyre me ndihmën e ekuacioneve. Në këtë rast është e nevojshme që njohuritë tona të deritanishme t'i aplikojmë në të kuptuarit e problemit, të shkruarjes së tij në formë të ekuacionit dhe në fund në zgjidhjen e ekuacionit. Për këtë duhet që:

1. *Problemin ta lexojmë (dëgjojmë) kujdesshëm në mënyrë që të përcaktojmë të njohurat dhe të panjohurat, çfarë informacioni paraqesin ato dhe çfarë informacioni duhet të nxjerrim vetë nga ato.*
2. *Nëse është e dobishme, bëjmë ilustrimin grafik të problemit (nëse kjo* është e mundur) *dhe në të i paraqesim të gjitha të dhënat.*
3. *Me ndihmen e shkronjave paraqesim disa nga të panjohurat, kurse me ndihmen e tyre i paraqesim të tjerat.*
4. *Duke përdorur kushtet e mësipërme, shkruajmë problemin në formë të ekuacionit.*
5. *E zgjidhim ekuacionin sipas njërës së panjohur e pastaj me ndihmën e saj i gjejmë të panjohurat e tjera.*
6. *Bëjmë provën duke zëvendësuar vlerën e gjetur të ndryshores në ekuacion.*

Shembull 1. Nëse një numër është për 18 më i madh se numri tjetër dhe nëse shuma e tyre është 62, caktoni ata numra.

Nëse numri i dytë është x, atëherë numri i parë është $x+18$. Meqenëse shuma e këtyre numrave është 62, merret ekuacioni:

numri i parë	plus	numri i dytë	barazi	62
$x+18$	$+$	x	$=$	62

$$(x+18)+x=62 \qquad \boxed{\text{ekuacioni}}$$

$$2x+18=62$$
$$2x=62-18$$
$$2x=44$$
$$x=22.$$

Pra, numri i dytë është 22, kurse numri i parë $x+18=22+18=40.$

Shembull 2. Shuma e katër numrave natyralë të njëpasnjëshëm është 10. Cilët janë ata numra?

numri	plus	numri i dytë	plus	numri i tretë	plus	numri i katërt	barazi	10
x	$+$	$(x+1)$	$+$	$(x+2)$	$+$	$(x+3)$	$=$	10

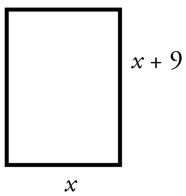
$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=10$$ ekuacioni

$$\begin{aligned} 4x+6&=10\\ 4x&=10-6\\ 4x&=4\\ x&=1. \end{aligned}$$

Pra, numri i parë i kërkuar është $x=1$, numri i dytë është $x+1=1+1=2$, numri i tretë është $x+3=1+2=3$ dhe numri i katërtë është $x+3=1+3=4$.

Shembull 3. Në një drejtkëndësh njëra brinjë është për 9 njësi më e madhe se brinja tjetër. Nëse perimetri i drejtkëndëshit është 58 njësi, gjeni gjatësitë e brinjëve.

Është e njohur se perimetri i drejtkëndëshit me brinjët a dhe b njehsohet me formulën $P=2a+2b$. Nëse me x shënojmë njërën brinjë të drejtkëndëshit, sipas kushtit të detyrës, brinja tjetër do të jetë $x+9$. Prandaj merret ekuacioni



$58=2x+2(x+9)$	thjeshtojmë ekuacionin
$58=2x+2x+18$	i mbledhim gjymtyrët e ngjashme
$58=4x+18$	të dyja anëve të ekuacionit ua zbresim numrin 18
$40=4x$	e pjesëtojmë ekuacionin me numrin 4
$10=x$	

Pra, njëra brinjë e drejtkëndëshit ka gjatësinë 10 njësi, kurse tjetra $x+9=10+9=19$ njësi.

Detyra për punë të pavarur

1. Të caktohet numri tek i cili gjysma e tij, një e treta dhe një e katërta së bashku e kalojnë atë për 1.
2. Kur një numri i shtohet numri a e pastaj ajo shumë ngritet në katror, fitohet numri që është për $8a$ më i madh se kur numrit të dhënë i zbritet numri a e pastaj ndryshimi ngritet në katror. Cili është ai numër?
3. Një numri treshifror njëherë i parashkruhet numri 8 e pastaj i ndajshkruhet numri 8. Fitohen dy numra, ndryshimi i të cilëve është 1107. Cili është ai numër?
4. Numrin 182 zbërthejeni në shumë të dy numrave, të cilët qëndrojnë ndërmjet vete në raport si edhe $2:5$.
5. Syprina e një drejtkëndëshi është për $125m^2$ më e madhe se e katrorit të ndërtuar mbi brinjën e vogël. Njehësoni gjatësitë e brinjëve të drejtkëndëshit, nëse diferenca e tyre është $5m$.
6. Shuma e shifrave të një numri dyshifror është 8. Nëse shifrave ua ndërrojmë vendet, fitohet numri i cili është për 10 më i madh se dyfishi i numrit të parë. Cili është ai numër?
7. Udhëtari i drejtohet bariut që ruante delet në kullosë me këto fjalë: „O bari me njëqind dele....”. Bariu ia ktheu: „Nuk janë njëqid, por po të ishin edhe kaq edhe sa gjysma e tyre edhe sa çereku i tyre me mua së bashku do të bënin njëqind“. Sa dele ka bariu?
8. Në një dhomë në të cilën banonin tre shokë ishte vendosur një pjatë me mollë. Njëri nga shokët merr një të tretën e mollëve. Duke mos ditur se ndonjëri nga shokët më parë kishte marrë mollë, i dyti merr një të tretën e mollëve të mbetura. Kështu vepron edhe i treti. Në fund kishin mbetur vetëm tetë mollë. Sa mollë ka patur në fillim?
9. Në një drejtkëndësh me perimetër 125cm njëra brinjë është për një më e vogël se trefishi i brinjës tjetër. Caktoni gjatësitë e brinjëve.
10. Shuma e tre numrave është 63. Numri i parë është sa dyfishi i të dytit, kurse numri i tretë sa trefishi i numrit të parë. Caktoni këta numra.
11. Një numër është nëntë herë më i madh se numri tjetër. Caktoni këta numra nëse shuma e tyre është 120.

12. Është dhënë thyesa $\frac{9}{17}$. Cili numër duhet t'u shtohet emëruesit dhe numëruesit, që të fitohet thyesa $\frac{3}{8}$.
13. Në qytet gjenden tri shkolla fillore. Numri i nxënësve të shkollës së parë është sa $\frac{1}{4}$ e numrit të nxënësve të tri shkollave, numri i nxënësve të shkollës së dytë është sa $\frac{1}{5}$ e numrit të nxënësve të tri shkollave dhe numri i nxënësve të shkollës së tretë është për 840 më i madh se numri i nxënësve të shkollës së parë. Sa nxënës kanë të tri shkollat.

14. Shuma e emëruesit dhe e numëruesit të një thyese është 4940. Pas thjeshtimit merret thyesa $\frac{1}{3}$.Caktoni thyesën para thjeshtimit.

Këndi qendror dhe periferik

Këndi qendror:

Këndin kulmi i të cilit ndodhet në qendrën e një rrethi e quajmë kënd qendror.

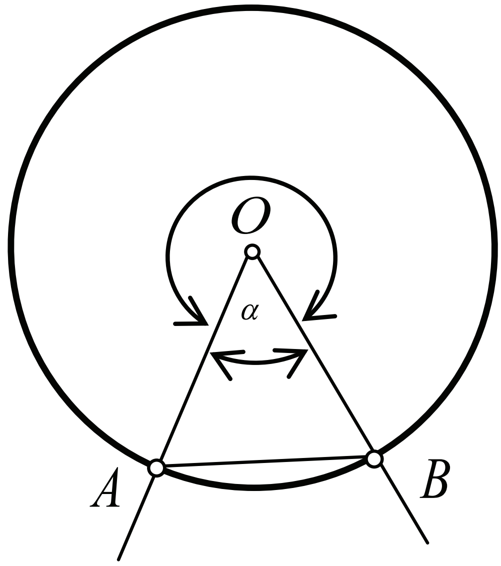


Fig. 10.10

Është e qartë se krahët e këndit qendror përmbajnë rrezet e rrethit
Emërtoni këndet qendrore në figurën 10.10! Janë dy kënde të tilla. Nëse njërin prej tyre e shënojmë me α, atëherë këndi tjetër $\alpha' = 360^\circ - \alpha$. Në rastin e veçantë, kur rrezet e rrethit [OA]. dhe [OB]. i takojnë një drejtëze, atëherë $\alpha = \alpha' = 180^\circ$. Kur flasim për këndin qendror, nëse nuk thuhet ndryshe, do të mendojmë për këndin masa e të cilit është më e vogël se 180°.

Këndi periferik:

Këndin kulmi i të cilit i takon një rrethi dhe brinjët e të cilit përfshijnë dy korda të rrethit, e quajmë kënd periferik.

Në figurën 10.11, krahët e këndit periferik ASB, me kulmin S, i përmbajnë kordat $[SA]$ dhe $[SB]$.
Brinjët e këndit qendror dhe të këndit periferik përcaktojnë në rreth një kordë të tij. Prandaj shpesh herë shprehemi për këndet qendrore dhe për këndet periferike mbi një kordë. Në figurën 10.11 këndi AOB është një kënd qendror mbi kordën [AB]. Në të njëjtën figurë, këndi ASB paraqet një kënd periferik mbi kordën [AB].
Shënim: *Duke u bazuar në figurën* 10.11, *shohim se ekziston vetëm një kënd qendror i ndërtuar mbi kordën* [AB]. *Nga ana tjetër, mbi kordën* [AB] *ekzistojnë pa kufi shumë kënde periferike.*
Ndërmjet këndeve periferike dhe këndit qendror mbi të njëjtën kordë ekzistojnë disa lidhje interesante, të cilat po i formulojmë si veti:

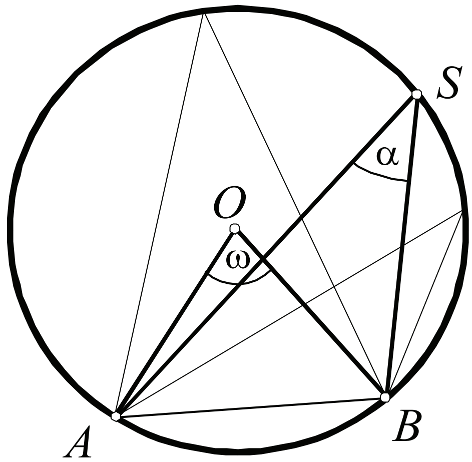


Fig. 10.11

Vetia I. *Do të tregojmë se këndi periferik është sa gjysma e këndit qendror të ndërtuar mbi të njëjtën kordë.*
Po e shqyrtojmë së pari rastin e paraqitur në figurën 10.12. Brinja [SA].e këndit periferik mbi kordën [AB] paraqet diametër të rrethit. Nëse me α e shënojmë këndin periferik ASB mbi kordën [AB], rrjedh se këndi SOB është $180^\circ - 2\alpha$. Prej këndej, duke pasur parasysh se këndi AOB është kënd i përbrinjëshëm me këndin SOB, përfundojmë se këndi qendror AOB është i barabartë me 2a.

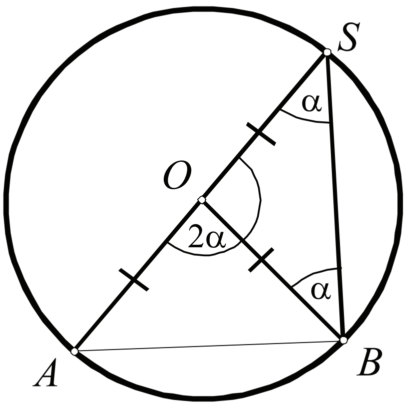


Fig. 10.12

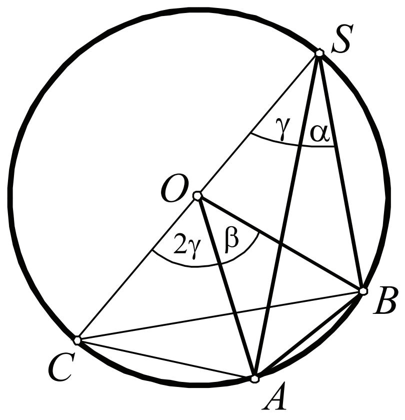


Fig. 10.13

Të vërejmë tani rastin kur brinja [SB] e këndit periferik mbi kordën [AB] nuk përputhet me diametrin e rrethit (fig.10.13).
Kopjoni në fletore figurën 10.13. Shënoni me α këndin periferik dhe me β këndin qendror mbi të njëjtën kordë [AB]. Tërhiqni diametrin [SC] nga pika S. Shënoni me γ këndin periferik mbi kordën [CA] Dimë se këndi përkatës qendror (këndi ÐAOC) është i barabartë me 2γ. Vëreni tani këndin periferik BSC mbi kordën $[BC]$ dhe këndin qendror mbi të njëjtën kordë. Tregoni se për çfarë arsyeje vlen barazimi:

$$2\gamma + \beta = 2(\alpha + \gamma).$$

Nga barazimi i fundit rrjedh: $\beta = 2\alpha$.

Vetia II. *Këndet periferike mbi të njëjtën kordë janë të barabarta.*

Le të jenë α dhe β cilat do dy kënde periferike mbi të njëjtën kordë $[AB]$. Shënojmë me ω këndin qendror mbi të njëjtën kordë, fig.10.14. Atëherë $2\alpha = \omega$ dhe $2\beta = \omega$. Prej nga $\alpha = \beta$.

Vetia III: *Këndi periferik mbi diametrin e rrethit është i drejtë.*

Le të jetë $\angle ACB$ kënd periferik mbi diametrin $[AB]$. Bashkojmë pikën C me pikën O. Trekëndëshat AOC dhe BOC janë barakrahës. Shënojmë këndet e këtyre trekëndëshave siç është bërë në figurën 10.15.

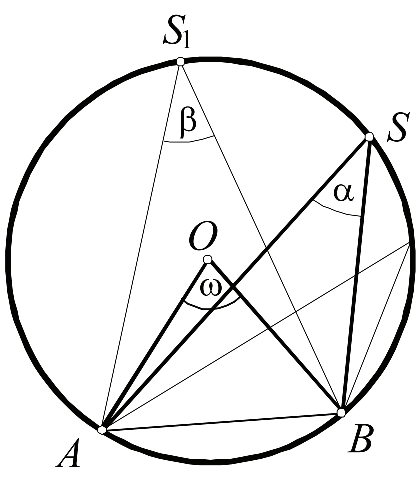


Fig. 10.14

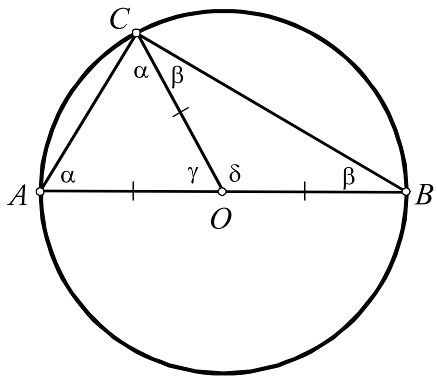


Fig. 10.15

Sipas vetisë II, kemi: $\gamma = 2\beta$ dhe $\delta = 2\alpha$.
Meqenëse $\gamma + \delta = 180^\circ$, atëherë nga trekëndëshi AOC, kemi: $2(\alpha + \beta) = \delta + \gamma = 180^\circ$.
Prej nga $\alpha + \beta = 90^\circ$. Rrjedhimisht këndi te kulmi C është i drejtë.
Detyra për punë të pavarur

1. Gjeni elementet e panjohura në figurën 10.16.

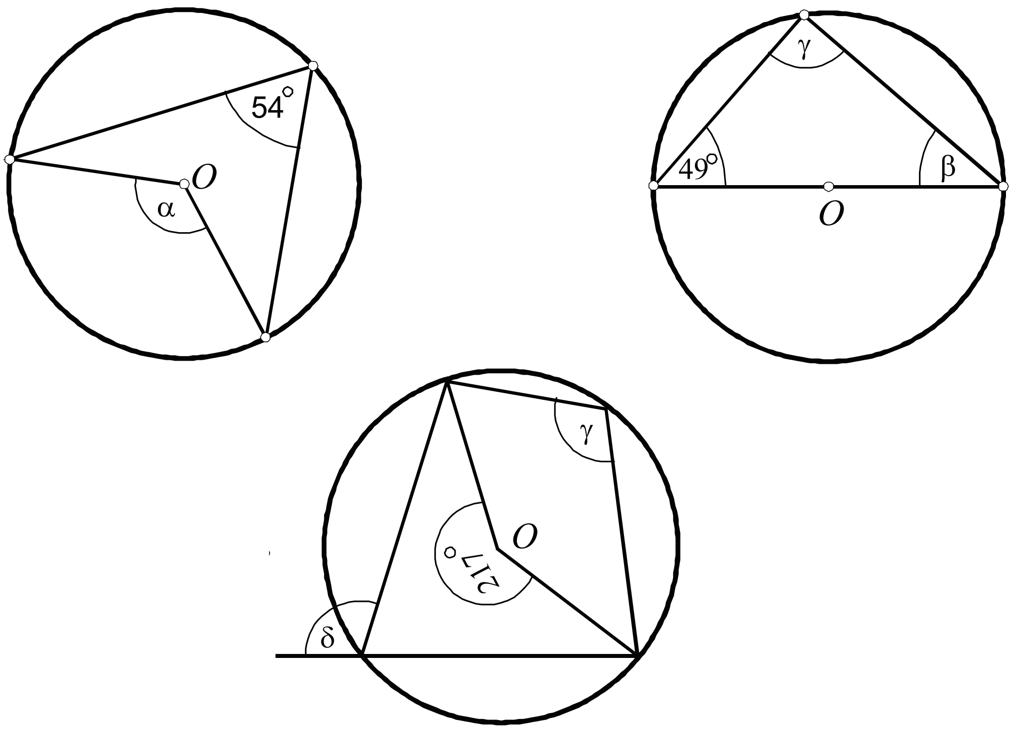
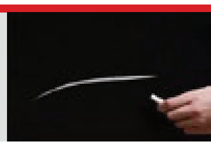


Fig. 10.16



Kongruenca e trekëndëshave

Le të jenë ΔABC dhe $\Delta A_1B_1C_1$ trekëndësha që shtrihen në të njëjtin rrafsh α. Sipas përkufizimit 20, paragrafi 2, dy trekëndësha ΔABC dhe $\Delta A_1B_1C_1$ janë kongruentë nëse ekzistoni izometria $\Im$ e rrafshit α, e cila njërin trekëndësh e pasqyron në tjetrin, d.m.th. $\Im(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$. Simbolikisht shkruajmë:

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1.$$

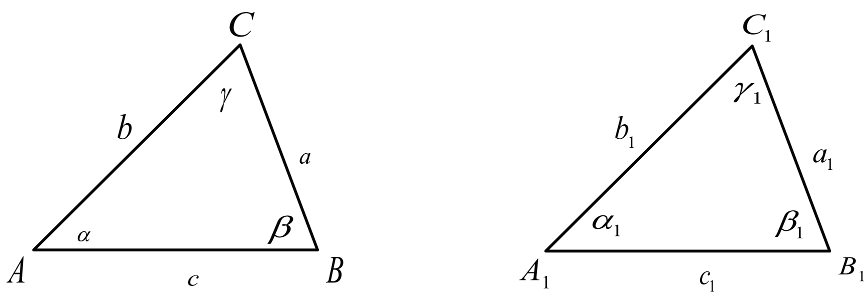


Fig.2.65

Është e qartë se nëse $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$, do të vlejë:

$$[AB] \cong [A_1B_1],\quad [BC] \cong [B_1C_1],\quad [CA] \cong [C_1A_1],\quad \alpha = \alpha_1,\quad \beta = \beta_1 \ \text{dhe}\ \gamma = \gamma_1.$$

Kjo do të thotë se edhe gjatësitë e brinjëve përkatëse dhe masat e këndeve përkatëse të dy trekëndëshave kongruentë janë të barabarta mes veti. Duhet pasur kujdes të veçantë gjatë renditjes se kulmeve. Renditja duhet të jetë e tillë që $\Im(A) = A_1$, $\Im(B) = B_1$ dhe $\Im(C) = C_1$. Meqenëse brinja përballë kulmit A të këndit α shënohet me a, ajo përballë kulmit B të këndit β shënohet me b, ndërsa ajo përballë kulmit C të këndit γ shënohet me c, atëherë nga $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ rrjedh se: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ dhe $\gamma = \gamma_1$.
Për të vërtetuar kongruencën e dy trekëndëshave nuk duhet vërtetuar kongruencën e të gjitha brinjëve dhe këndeve përkatëse. Në vazhdim do t'i japim disa pohime të cilat paraqesin kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme për kongruencën e dy trekëndëshave. Këto pohime njihen si *rregullat për kongruencën e dy trekëndëshave.*

Rregulla I (BBB):

Dy trekëndësha janë kongruentë atëherë dhe vetëm atëherë nëse brinjët e njërit janë kongruente me brinjët përkatëse të tjetrit. D.m.th.
$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = a_1$, $b = b_1$ dhe $c = c_1$

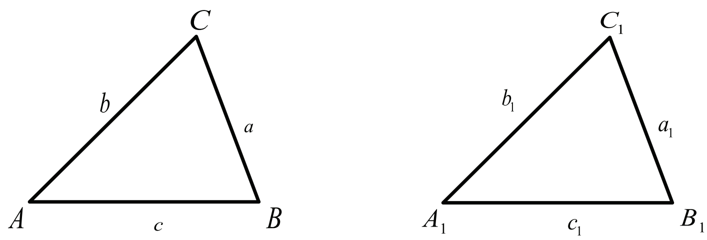


Fig.2.66

Shënimi (BBB) tregon se tri brinjët e njërit janë kongruente me brinjët përkatëse të tjetrit dhe lexohet: *brinja, brinja, brinja.*

Rregulla II (BKB):

Dy trekëndësha janë kongruentë atëherë dhe vetëm atëherë nëse dy brinjët e njërit dhe këndi që formojnë ato, janë kongruente me dy brinjët përkatëse dhe këndin që formojnë ato të trekëndëshit tjetër. D.m.th.
$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $b = b_1$, $c = c_1$ dhe $\alpha = \alpha_1$.

Edhe këtu, shënimi (BKB) tregon se dy brinjët e njërit dhe këndi që formojnë ato janë kongruente me dy brinjët përkatëse dhe këndin që formojnë ato të tjetrit dhe lexohet: *brinja, këndi, brinja*.

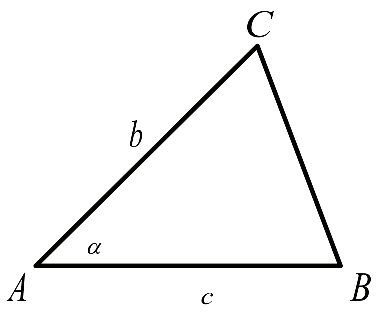


Fig.2.67

Rregulla III (KBK):

Dy trekëndësha janë kongruentë atëherë dhe vetëm atëherë nëse një brinjë e njërit dhe dy këndet që shtrihen (pushojnë) në atë brinjë të njërit trekëndësh janë kongruente me elementet përkatëse të tjetrit. D.m.th.
$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $c = c_1$, $\alpha = \alpha_1$ dhe $\beta = \beta_1$.

Edhe këtu, shënimi (KBK) (*këndi, brinja, këndi*) tregon se njëra brinjë e njërit trekëndësh dhe dy këndet që shtrihen në atë brinjë janë kongruente me një brinjë dhe dy këndet që shtrihen në atë brinjë të trekëndëshit tjetër.

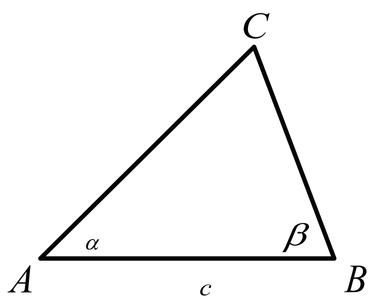


Fig.2.68

Rregulla IV (BBK):

Dy trekëndësha janë kongruentë atëherë dhe vetëm atëherë nëse dy brinjë të njërit dhe këndi përballë njërës prej tyre i njërit trekëndësh janë kongruente me elementet përkatëse të tjetrit, ndërsa këndet përballë dy brinjëve tjera janë të të njëjtës klasë: të dy të ngushtë, të dy të drejtë ose të dy të gjerë. D.m.th.
$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = a_1, b = b_1, \alpha = \alpha_1$ dhe β, β_1 janë njëkohësisht: të ngushtë, të drejtë ose të gjerë.

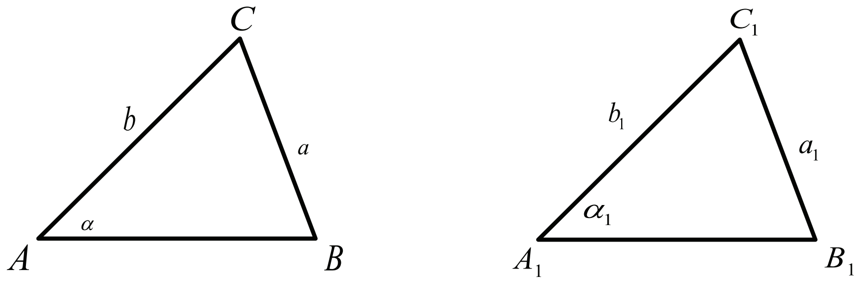


Fig.2.69

Shënimi (BBK) lexohet (*brinja, brinja, këndi*).
Këto janë katër rregullat për kongruencën e dy trekëndëshave, të cilat luajnë një rol të rëndësishëm në gjeometri. Përmes tyre ne jemi në gjendje të vërtetojmë veti shumë të rëndësishme të elementeve të trekëndëshit.
Për një trekëndësh, këndi i cili është i përbrijshëm me këndin e tij të brendshëm quhet *kënd i jashtëm* i tij (këndi α_1) (fig.2.70). Është e qartë se çdo trekëndësh ka tre kënde të jashtme.
Lartësi të trekëndëshit quajmë segmentin njëri skaj i të cilit është një kulm i trekëndëshit, ndërsa skaji tjetër është këmbëza e normales e cila kalon nëpër të njëjtin kulm dhe është normale në brinjën përballë atij kulmi (fig. 2.70).

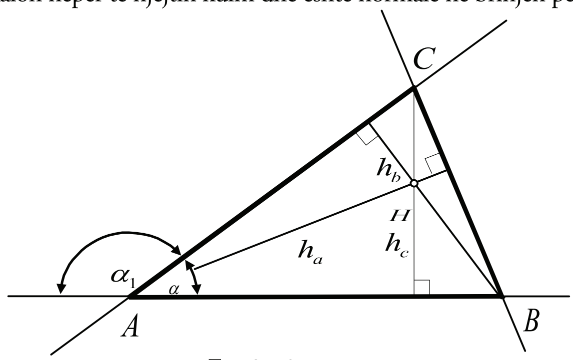


Fig.2.70

Lartësitë e trekëndëshit janë tri gjithsej dhe zakonisht shënohen me: h_a, h_b, h_c, ku indeksi tregon se cilës brinjë i përgjigjet lartësia. Në fig.2.70, lartësia h_c i përgjigjet brinjës $c = [AB]$. Vërtetohet se drejtëzat të cilat formohen nga tri lartësitë e trekëndëshit priten në një pikë H e cila quhet *ortoqendër* e trekëndëshit (fig.2.70).
Segmenti, skajet e të cilit janë një kulm i trekëndëshit dhe mesi i brinjës përballë atij kulmi quhet *medianë* e trekëndëshit e cila i përgjigjet brinjës përkatëse. Ngjashëm si te lartësitë, një trekëndësh ka gjithsej tri mediana të cilat shënohen me: m_a, m_b, m_c, ku indeksi tregon se cilës brinjë i përgjigjet mediana. Në fig.2.71, mediana m_a i përgjigjet brinjës $a = [BC]$. Edhe medianet e trekë-ndëshit, ngjashëm si lartësitë priten në një pikë, e cila quhet *qendër e rëndimit* e trekëndëshit (fig. 2.71).

Segmenti, skajet e të cilit janë meset e dy brinjëve të trekëndë-shit quhet *vijë e mesme* e tij. Nëse A_1, B_1, C_1 janë meset e brinjëve $[BC],[CA],[AB]$ respektivisht, atëherë vijat e mesme të trekëndëshit ΔABC janë segmentet: $[A_1B_1],[B_1C_1],[C_1A_1]$ respektivisht (fig.2.71). Nganjëherë kur flasim për vijat e mesme, mendojmë në drejtëzat që përcaktojnë meset e brinjëve të trekëndëshit. Lexuesi nuk e ka vështirë të bëjë dallimin se a flitet për drejtëz si vijë e mesme, apo për segment në kuadër të ndonjë problemi.

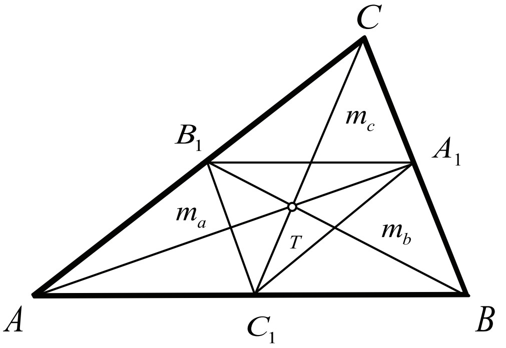


Fig.2.71

Shembull 1. Tregoni se trekëndëshat ΔABC dhe $\Delta A_1B_1C_1$ për të cilët vlen: $b = b_1$, $c = c_1$ dhe $m_c = m_{c_1}$ janë kongruentë mes veti.

Zgjidhje. Le të jetë $[CD] = m_c$ dhe $[C_1D_1] = m_{c_1}$. Për trekëndëshat ΔACD dhe $\Delta A_1C_1D_1$ vlen: $[AC] = [A_1C_1]$ dhe $[CD] = [C_1D_1]$. Pikat D e D_1 janë meset e brinjëve $[AB]$ e $[A_1B_1]$ respektivisht (fig.2.72), prandaj segmentet $[AD]$ e $[A_1D_1]$ janë mes veti kongruentë (si gjysma të segmenteve kongruente). Kështu, trekëndëshat ΔACD dhe $\Delta A_1C_1D_1$ janë kongruentë (rregulla BBB). Nga kjo rrjedh se këndi $\alpha = \alpha_1$. Tani, për trekëndëshat ΔABC dhe $\Delta A_1B_1C_1$ zbatojmë rregullën (BKB) dhe përfundojmë se $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

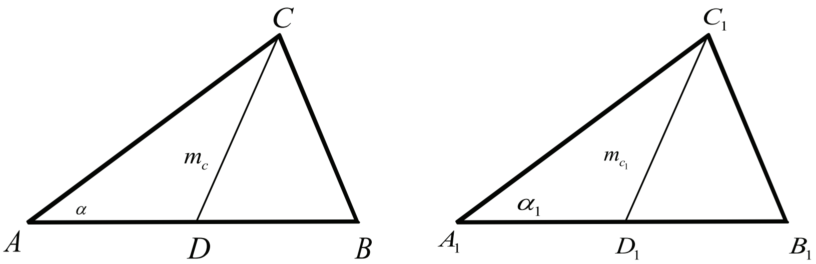


Fig.2.72

Trekëndëshi i cili i ka dy brinjë kongruente quhet trekëndësh *barakrahësh* (fig. 2.73). Brinjët kongruente quhen *krahë,* ndërsa brinja e tretë quhet *bazë. T*rekëndëshi i cili i ka të gjitha brinjët kongruente quhet trekëndësh *barabrinjës* (fig.2.74) .

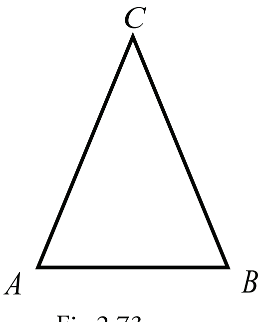


Fig.2.73

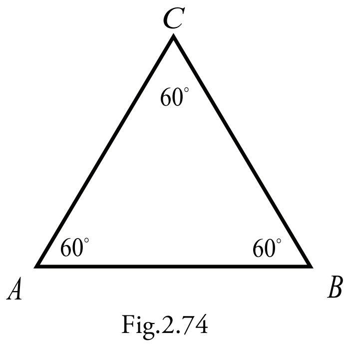


Fig.2.74

Pohim 1. Në çdo trekëndësh, barakrahësh përballë brinjëve kongruente ndodhen këndet kongruente dhe anasjelltas.

Vërtetim. Le të jetë ΔABC trekëndësh barakrahësh tek i cili $[AC] = [BC]$ (fig. 2.73). Tregojmë se $\angle ABC \cong \angle BAC$. Nga $[AC] \cong [BC]$ rrjedh se $[BC] \cong [AC]$, ndërsa $[AB] \cong [BA]$, prandaj nga rregulla (BBB) rrjedh se $\Delta ABC \cong \Delta BAC$. Tani është e qartë se $\angle ABC \cong \angle BAC$. *Anasjelltas*, nga $\angle ABC \cong \angle BAC$, atëherë duke shfrytëzuar rregullën (KBK), marrim kongruencën $\angle ABC \cong \angle BAC$. Tani, nga këtu rrjedh se $[AC] \cong [BC]$.

Si rrjedhim i pohimit të mësipërm kemi faktin se të gjitha këndet e trekëndëshit barabrinjës janë kongruentë mes veti. Sa është masa e tyre? Më vonë do të shohim se masa e tyre është 60^o. Në vazhdim do ta vërtetojmë një pohim të rëndësishëm që ka të bëjë me medianën e trekëndëshit barakrahësh, e cila i përgjigjet bazës së tij.

Pohim 2. Mediana e cila i përgjigjet bazës së trekëndëshit barakrahësh njëkohësisht paraqet lartësinë e tij të lëshuar në bazën e tij dhe simetralen e këndit përballë bazës.

Vërtetim. Le të jetë M mesi i bazës $[AB]$ të trekëndëshit barakrahësh ΔABC (fig. 2.75). Meqenëse $[AC] \cong [BC], [AM] \cong [BM]$ dhe $[CM] \cong [CM]$, nga rregulla (BBB), Nga këtu rrjedh se $\angle AMC \cong \angle BMC$. Meqenëse këta të fundit janë të përbrijshëm, përfundojmë se ata janë të drejtë. D.m.th. drejtëza $d(C, M)$ e përmban lartësinë. Pra lartësia përputhet me medianën. Po ashtu, nga $\Delta AMC \cong \Delta BMC$ rrjedh kongruenca e këndeve $\angle ACM$ dhe $\angle BCM$, që d.m.th. se gjysmëdrejtëza CM me fillim në pikën C është simetrale e këndit te kulmi C i trekëndëshit ΔABC. Vlen edhe pohimi i anasjelltë: *simetralja e këndit përballë bazës së trekëndëshit barakrahësh është normale në bazën e tij.* Kjo do të thotë se te trekëndëshi barakrahësh, lartësia, mediana dhe simetralja e këndit përballë bazës përputhen.

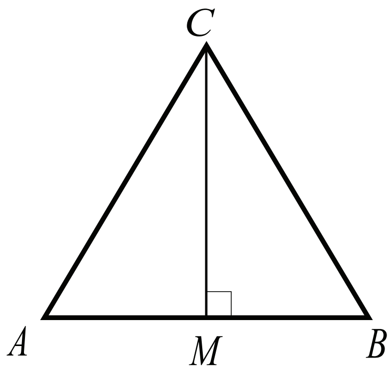


Fig.2.75

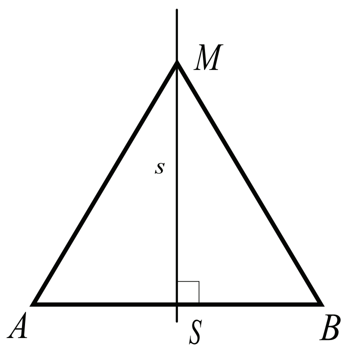


Fig.2.76

Shembull 2. Nëse M është pikë e simetrale s së segmentit $[AB]$, atëherë. $[AM] \cong [BM]$.

Zgjidhje. Me të vërtetë, nëse S është mesi i segmentit $[AB]$, atëherë dallojmë rastet:
1° $M \equiv S$, në këtë rast $[AM] \cong [BM]$. 2° $M \neq S$, në këtë rast $[AS] \cong [BS], [MS] \cong [MS]$ dhe $\angle ASM \cong \angle BSM = 90^\circ$. Kështu $\Delta ASM \cong \Delta BSM$. Prej nga rrjedh se $[AM] \cong [BM]$ (fig.2.76).

Shembull 3. Nëse mediana e trekëndëshit është njëkohësisht edhe simetrale e këndit, tregoni se ai trekëndësh është barakrahësh.

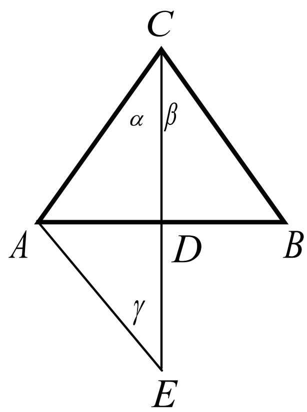
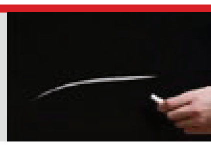


Fig.2.77

Zgjidhje. Le të jetë D mesi i brinjës $[AB]$ të trekëndëshit ΔABC. Sipas supozimit, vlen: $\alpha = \beta, [AD] \cong [BD]$. Le të jetë E pikë në drejtëzën CE e tillë që $(C - D - E)$ dhe D të jetë mesi i segmentit $[CE]$. Tani kemi: $[AD] \cong [BD], [CD] \cong [ED]$ dhe $\angle BDC = \angle ADE$ (si kënde kryqëzorë). Në bazë të rregullës (BKB), rrjedh se trekëndëshat ΔBCD dhe ΔAED janë kongruentë. Prandaj $[BC] \cong [AE]$ dhe $\beta = \gamma$. Kështu, trekëndëshi AEC ka dy kënde kongruente, prandaj ai është barakrahësh. Brinjët kongruente janë përballë këndeve kongruente, në këtë rast $[AC]$ dhe $[AE]$. Tani nga $[AC] \cong [AE]$ dhe $[AE] \cong [BC]$, përfundojmë se $[AC] \cong [BC]$, që d.m.th. se ΔABC është barakrahësh.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Vërtetoni se dy trekëndësha ΔABC dhe $\Delta A_1B_1C_1$ janë kongruentë nëse lartësitë e tyre $[CD]$ dhe $[C_1D_1]$ dhe këndet ACD dhe $A_1C_1D_1$ janë kongruente.
2. Vërtetoni se dy trekëndësha këndngushtë ΔABC dhe $\Delta A_1B_1C_1$ janë kongruentë nëse lartësitë e tyre $[CD]$ dhe $[C_1D_1]$ janë kongruente dhe $[AD] \cong [A_1D_1]$ dhe $[BD] \cong [B_1D_1]$.
3. Tregoni se medianet të cilat u përgjigjen krahëve të trekëndëshit barakrahësh janë kongruente mes veti.
4. Në brendinë e këndit konveks pOq është dhënë pika M. Nëse P është këmbëza e normales nga pika M në krahun p, ndërsa Q është këmbëza e normales nga pika M në krahun q dhe nëse $[MP] \cong [MQ]$, tregoni se gjysmëdrejtëza OM është simetrale e këndit pOq. Nëse në një trekëndësh ΔABC ndonjëra medianë e tij është sa një e dyta e brinjës përballë saj, tregoni se njëri kënd i atij trekëndëshi është i barabartë me shumën e dy këndeve tjera.



Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve racionale

Kur mbledhim ose zbresim numrat racionalë me emërues të njëjtë zbatojmë vetinë e mbledhjes së thyesave. Kjo veti mund të zgjerohet edhe për shprehjet racionale.

Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve racionale me emërues të njëjtë:

Le të jenë P, Q dhe R polinome, $Q \neq 0$, atëherë

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q}=\frac{P+R}{Q} \quad \text{dhe} \quad \frac{P}{Q}-\frac{R}{Q}=\frac{P-R}{Q}.$$

Shembull 1. Të njehsojmë $\frac{3x+2}{x-2}+\frac{4x-5}{x-2}$.

Kemi: $\frac{3x+2}{x-2}+\frac{4x-5}{x-2}=\frac{(3x+2)+(4x-5)}{x-2}=\frac{3x+2+4x-5}{x-2}$ mbledhim termat e nagjashëm

$=\frac{7x-3}{x-2}$.

Shembull 2. Të njehsojmë $\frac{3x-2y}{x^2-y^2}-\frac{2x-3y}{x^2-y^2}$.

Kemi:

$$\frac{3x-2y}{x^2-y^2}-\frac{2x-3y}{x^2-y^2}=\frac{(3x-2y)-(2x-3y)}{x^2-y^2}=\frac{3x-2y-2x+3y}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}=\frac{1}{x-y} \ (x \neq y).$$

Kur mbledhim dy shprehje racionale $\frac{P}{Q}$ dhe $\frac{R}{S}$, me emërues të ndryshëm, veprojmë si vijon:

Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve me emërues të ndryshëm:

Në qoftë se P,Q,R dhe S janë polinome, $Q \neq 0$, dhe $S \neq 0$, atëherë

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{P\cdot S+Q\cdot R}{Q\cdot S} \quad dhe \quad \frac{P}{Q}-\frac{R}{S}=\frac{P\cdot S-Q\cdot R}{Q\cdot S}$$

Shembull 3. Të njehsojmë $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-3}{x+4}$.

Kemi:

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-3}{x+4}=\frac{(x+1)(x+4)+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+4)}=\frac{(x^2+5x+4)+(x^2-5x+6)}{(x-2)(x+4)}$$

$$=\frac{2x^2+10}{(x-2)(x+4)},\ (x\neq 2,\ x\neq -4).$$

Shembull 4. Të njehsojmë $\frac{x}{x-7}-\frac{2x+1}{x-9}$.
Kemi:

$$\frac{x}{x-7}-\frac{2x+1}{x-9}=\frac{x(x-9)-(x-7)(2x+1)}{(x-7)(x-9)}=\frac{(x^2-9x)-(2x^2-13x-7)}{(x-7)(x-9)}$$

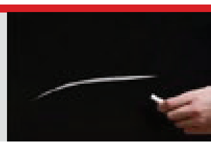
$$=\frac{x^2-9x-2x^2+13x+7}{(x-7)(x-9)}=\frac{-x^2+4x+7}{(x-7)(x-9)}\ (x\neq 7,\ x\neq 9).$$

Kur i mbledhim ose zbresim dy shprehje racionale emërusit e të cilave nuk kanë faktorë të përbashkët (kur shprehjet racionale nuk kanë emërues të barabartë), ne zbatojmë **parimin themelor të shprehjeve racionale**, në atë mënyrë që shprehjet raconale i sjellim në shprehje me emërues të barabartë. Që të bëjmë këtë, ne duhet të gjejmë shumëfishin më të vogël të përbashkët $(SHMVP)$ të emëruesve të shprehjeve të dhëna.

SHMVP i dy ose më shumë shprehjeve racionale është shprehja më e vogël racionale, e cila pjesëtohet pa mbetje me shprehjet e dhëna.

Gjetja e SHMVP për një ose më shumë polinome:

- Zbërthimi i plotë i polinomeve të dhëna.
- SHMVP përbëhet nga prodhimi i të gjithë faktorëve të ndryshëm të polinomeve, secili prej tyre i ngritur në shkallën më të lartë, në të cilën është paraqitur në ndonjërin nga faktorët e polinomeve të dhëna.



Shembull 5. Të gjejmë *SHMVP* **për polinomet** $2x-4,\ \ x^2-4,\ \ x^2+4x+4$. Së pari bëjmë faktorizimin e plotë të polinomeve të dhëna:

$$2x-4=2(x-2)$$

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

$$x^2+4x+4=(x+2)^2$$

Pra, *SHMVP* për polinomet: $2x-4,\ x^2-4,\ x^2+4x+4$ është $2(x-2)(x+2)^2$.

Shembull 6. Shkruaj shprehjen racionale $\frac{3x-2}{2x-1}$ në shprehje ekuivalente me të, por me emëruesin $4x^2-1$. Meqenëse $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$, faktori ndërtues i emëruesit $4x^2-1$ **për shprehjen** $\frac{3x-2}{2x-1}$ **është** $2x+1$. Rrjedhimisht

$$\frac{3x-2}{2x-1} \qquad \boxed{\text{shumëzimi i numëruesit dhe i emëruesit me } 2x-1}$$

$$=\frac{(3x-2)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{6x^2-x-2}{4x^2-1}.$$

Shembull 7. Të njehsojmë $\frac{10}{x-3}+\frac{9}{x^2+3x-18}$.

Meqenëse $x-3=(x-3)$ dhe $x^2+3x-18=(x-3)(x+6)$, atëherë

$$\frac{10}{x-3}+\frac{9}{x^2+3x-18}=\frac{10}{x-3}+\frac{9}{(x-3)(x+6)}=\frac{10}{x-3}\cdot\frac{x+6}{x+6}+\frac{9}{x^2+3x-18}$$

$$=\frac{10}{x-3}\cdot\frac{x+6}{x+6}+\frac{9}{x2+3x-18}$$

$$=\frac{10(x+6)}{(x-3)(x+6)}+\frac{9}{(x-3)(x+6)}$$

$$=\frac{10x+60+9}{(x-3)(x+6)}=\frac{10x+69}{(x-3)(x+6)}.$$

Shembull 8. Të njehsojmë $\dfrac{y+3}{y^2+4y-21}-\dfrac{y+5}{y^2+6y-27}$.

Meqenëse $y^2+4y-21=(y-3)(y+7)$ dhe $y^2+6y-27=(y+9)(y-3)$, *SHMVP* për $y^2+4y-21$ dhe $y^2+6y-27$ është $(y+9)(y-3)(y+7)$, prandaj:

$$\frac{y+3}{y^2+4y-21}-\frac{y+5}{y^2+6y-27}=\frac{y+3}{(y-3)(y+7)}-\frac{y+5}{(y+9)(y-3)}$$

$$=\frac{y+3}{(y-3)(y+7)}\cdot\frac{y+9}{y+9}-\frac{y+5}{(y+9)(y-3)}\cdot\frac{y+7}{y+7}$$

$$=\frac{(y+3)(y+9)}{(y-3)(y+7)(y+9)}-\frac{(y+5)(y+7)}{(y+9)(y-3)(y+7)}$$

$$=\frac{y^2+12y+27}{(y-3)(y+7)(y+9)}-\frac{y^2+12y+35}{(y+9)(y-3)(y+7)}$$

$$=\frac{(y^2+12y+27)-(y^2+12y+35)}{(y-3)(y+9)(y+7)}$$

$$=\frac{y^2+12y+27-y^2-12y-35}{(y+3)(y+9)(y-7)}$$

$$=\frac{-8}{(y+3)(y+9)(y-7)}.$$

Në vazhdim po japim procedurën e mbledhjes dhe të zbritjes së shprehjeve racionale.

1. Në qoftë se emëruesit e shprehjeve racionale janë të barabartë, atmblidhen ose zbriten numëruesit e tyre dhe rezultati shkruhet në numërues të shprehjes, kurse emërusi mbetet i njejtë.
2. Në qoftë se emëruesit janë të ndryshëm, atëherë gjendet shumëfishi më i vogël i përbashkët i tyre.
3. Shumëzohet numëruesi dhe emëruesi i shprehjes racionale me faktorët e shumëfishit më të vogël të përbashkët, të cilët mungojnë në emëruesin e shprehjes racionale, në mënyrë që shprehja racionale të mbetet ekuivalente, por të jetë e përshtatshme për mbledhje ose zbritje.
4. Vazhdohet nga hapi 1 me thjeshtimin e shprehjes racionale derisa është e mundur.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

Gjeni shumëfishin më të vogël të përbashkët të polinomeve:

1. $14x,\ 35.$

2. $42y,\ 36$

3. $10k,\ 16k^2.$

4. $18x^3,\ 21x^2$

5. $32a^3b,\ 9ab^2.$

6. $48x^2y^2,\ 30x^4y$

7. $xy^3,\ 6x^2y^2,\ 15xy^4.$

8. $4mn^4,\ 14m^2n^3,\ 35mn.$

9. $4a,\ 2a-4.$

10. $9b,\ 15b+30.$

11. $x-7,\ 3x-21,\ 6x.$

12. $x+9,\ 4x+36,\ 8x$

13. $q^2-49,\ q^2+5q-14,\ q-7.$

14. $a^2-25,\ 10a+50,\ 5a-25.$

15. $n^2-9,\ n^2-n-6,\ 8n^2+24n.$

16. $a-b,\ a^2-b^2,\ 5a+5b.$

17. $3x+9,\ x^2-9,\ x^2-6x+9.$

19. $2y+10,\ y^2-25,\ y^2-10y+25.$

20. $2a^2-13a-7,\ 6a^2+a-1,\ a^2-49.$

18. $x^2+6x+9,\ 2x+6,\ x^2+x-6.$

Shprehjet e dhëna racionale sillni në shprehje ekuivalente me to, por me emërues të barabartë me shprehjen e dhënë.

21. $\frac{4}{7x}$, emëruesi $21x^3$.

22. $\frac{8}{9y^2}$, emëruesi $72y^5$.

23. $\frac{5x}{8y}$, emëruesi $24x^2y^2$.

24. $\frac{-3a}{7b^2}$, emëruesi $35a^2b^3$.

25. $4p$, emëruesi $p-3$.

26. $a+3$, emëruesi $2a-1$.

27. $\frac{p-3}{p+2}$, emëruesi p^2-4.

28. $\frac{n+7}{n-9}$, emëruesi n^2-81.

29. $\frac{4x}{2x-3}$, emëruesi $8x^3-27$.

30. $\frac{9x}{3x+1}$, emëruesi $27x^3+1$.

Zbatime të ngjashmërisë së trekëndëshave

Lartësia h_c e trekëndëshit kënddrejtë ABC, në të cilin $\gamma = 90^{\circ}$ e ndan trekëndëshin në dy trekëndësha ACD dhe CBD të cilët janë të ngjashëm me trekëndëshin ACD dhe ndërmjet vete.

Shembull 1. Le të jetë ABC një trekëndësh me kënd të drejt te kulmi C. (fig.8.13). Shënojmë me p, q segmentet që i ndan lartësia h_c në brinjën AB (fig.11):

$a)$ $h_c = \sqrt{pq}$..

$b)$ $a = \sqrt{pq}$ dhe $b = \sqrt{qc}$.

$c)$ $c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema e Pitagorës).

Zgjidhje. Shënojmë me $p = DB$ dhe $q = AD$, d.m.th. $p + q = c$.

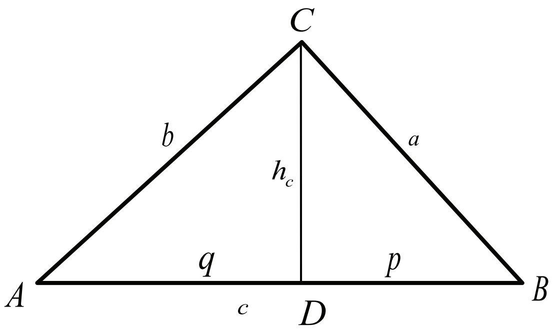


Fig. 8.13

$a)$ Nga relacioni $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ rrjedh se $q : h = h_c : p$, prej nga marrim $h_c = \sqrt{pq}$.

$b)$ Nga relacioni $\Delta CBD \sim \Delta ABC$ rrjedh se $a : p = c : a$, ndërsa nga relacioni $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ rrjedh se

$b : q = c : b$. Prej nga kemi $a = \sqrt{pq}$ dhe $b = \sqrt{qc}$.

$c)$ Në bazë të $b)$ kemi $a^2 = pc$ dhe $b^2 = qc$. Prej nga $a^2 + b_2 = pc + qc = (p+q)c = c \cdot c = c^2$, d.m.th. $c^2 = a^2 + b^2$.

Shembull 2. Janë dhënë $p = 5cm$ dhe $q = 8cm$. Të llogariten c, a, b dhe h_c.
Kemi:

$c = p + q = 5cm + 8cm = 13cm$, d.m.th. $c = 13cm$.

$a = \sqrt{pc} = \sqrt{5cm \cdot 13cm} = \sqrt{65}cm$, d.m.th. $a = \sqrt{65}cm$.

$b = \sqrt{qc} = \sqrt{8cm \cdot 13cm} = \sqrt{104}cm$, d.m.th. $b = \sqrt{104}cm$.

$h_c = \sqrt{pq} = \sqrt{8cm \cdot 5cm} = \sqrt{40}cm$, d.m.th. $h_c = \sqrt{40}cm$.

Duke shfrytëzuar kuptimin e ngjashmërisë së trekëndëshave mund të vërtetohen shumë veti të figurave të tjera gjeometrike e në veçanti të shumëkëndëshave. Gjithashtu, figurat e ngjashme mund të shfrytëzohen edhe gjatë zgjidhjes së detyrave konstruktive.

Shembull 3. Le të jetë ABC cilido trekëndësh. Të vërtetohet se vlen barazimi $h_b : h_c = c : b$ (ngjashëm $h_a : h_b = b : a$, $h_a : h_c = c : a$).

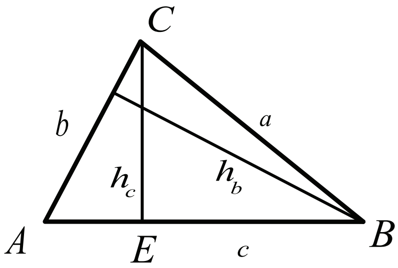


Fig. 8.14

Le të jenë $BD = h_b$ dhe $CE = h_c$ lartësi të trekëndëshit ABC (fig.8.14). Trekëndëshat kënddrejtë ABC dhe ACE kanë këndin e ngushtë të përbashkët α, prandaj janë të ngjashëm. prej nga marrim se $BD : AB = CE : AC$, prej këtej $BD : CE = AB : AC$, d.m.th. $h_b : h_c = c : b$. Në mënyrë plotësisht analoge vërtetohen edhe barazimet e dhëna në kllapa.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Segmenti i dhënë AB të ndahet në 5 pjesë të barabarta.
2. Është dhënë segmenti AB. Në drejtëzën AB të caktohen X, Y të tilla që $AX : BX = m : n$ dhe $AY : BY = m : n$, kur m, n janë segmente të dhëna.
3. Janë dhënë segmentet a, b, c. Të caktohet segmenti x nga barazimet
1° $a : b = c : x$. 2° $(a + x) : (a - x) = 4 : 3$.

4. Nëpër pikën P që ndodhet në këndin xOy konstruktoni drejtëzën p, që i pret krahët e këndit në pikat X, Y dhe që $OX : OY = m : n$, ku m, n janë segmente të dhëna.
5. Segmentin e dhënë a ndajeni në raport: $3 : 2$.
6. Është dhënë ΔABC dhe pikat E, D të tilla që $E \in BC$, $D \in AC$ dhe $B - E - C$, $A - D - C$:

$a)$ Nëse $|AC| = 12, |CD| = 4$ dhe $|BC| = 24$, njehsoni $|CE|$.
$b)$ Nëse $|AC| = 15$ dhe $|AD| = 3$, njehsoni $|BE|$.
$c)$ Nëse $|CD| = 6$ dhe $|CE| = 3$, njehsoni $|BC|$.
$d)$ Nëse $|CD| = 8$, $|AC| = 2$ dhe $|BE| = 6$, njehsoni CE.
$e)$ Nëse $|AD| = |CE|$, $|CD| = 4$ dhe $|BE| = 9$, njehsoni $|AC|$.

7. Është dhënë pesëkëndëshi $ABCDE$. Të konstruktohet figura homotetike e tij, në qoftë se:

$a)$ $H_{A,\frac{3}{2}}$.

$b)$ $H_{S,-\frac{2}{3}}$, S është jashtë pesëkëndëshit.

8. Në trekëndëshin e dhënë ABC të brendashkruhet katrori, dy kulme të të cilit i takojnë bazës, kurse dy kulme të tjera brinjëve anësore.

9. Është dhënë ΔABC. Të konstruktohet figura homotetike e këtij trekëndëshi, në qoftë se:

$a)\ H_{A,\frac{2}{3}}$. $\quad b)\ H_{T,2}$. $\quad c)\ H_{B,-\frac{3}{2}}$. $\quad d)\ H_{A_1,2}$.

T është qendra e rëndesës së ΔABC, kurse A_1 është mesi i brinjës BC.

10. Në trekëndëshin e dhënë ABC të brendashkruhet paralelogrami $AMNP$ ashtu që $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$ dhe $AM = 2MN$.

11. Të konstruktohet trekëndëshi kur dihen elementet

$a)\ \alpha, a, m_1$. $\quad b)\ b, \beta, m_c$. $\quad c)\ \beta, b, m_a$.

12. Brinjët e një trekëndëshi janë në përpjesëtim $3:5:7$. Të gjenden brinjët e trekëndëshit të ngjashëm me të, në qoftë se ky i fundit e ka:

$a)$ Brinjën më të vogël $6cm$.
$b)$ Ndryshimin e brinjëve më të madhe me brinjën më të vogël $2cm$.
$c)$ Perimetrin $45cm$.

13. Është dhënë ΔABC dhe pikat P, Q, R përkatësisht në drejtëzat BC, CA, AB. Vërtetoni se drejtëzat AP, BQ, CR priten në një pikë (ose janë paralele), atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{RB}=1.$$

14. Le të jenë K, M, N pika në brinjët BC, CA, AB , $CA\ \Delta ABC$. Vërtetoni se pikat K, M, N janë kolineare atëherë dhe vetëm atëherë kur vlen:

$$\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

15. Gjatësia e medianeve të trekëndëshit të shprehet me anë të gjatësive të brinjëve.

16. Janë dhënë dy segmente a, b. Të konstruktohet segmenti $\sqrt{ab}$.

17. Gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi shprehen me numrat 13,14 dhe 15. gjeni gjatësinë e lartësisë që i përgjigjet brinjës me gjatësi 14.

18. Vërtetoni se për medianat e trekëndëshit kënddrejtë vlen relacioni $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, ku c është hipotenuza.

19. Gjatësia e brinjëve të trekëndëshit shprehni si funksione të medianave.

20. Vërtetoni se shuma e katrorëve të diagonaleve të një paralelogrami është e barabartë me shumën e katrorëve të brinjëve të tij.

Të konstruktohet ΔABC kur dihen: $\alpha, m_a, b:c = 4:3$.

Inekuacionet e formës

Inekuacionet e formës $|x| < a$. Nëse në ekuacionin me vlerë absolute, barazimin e zëvendësojmë me njërën nga simbolet $<$, $>$, $\leq$ ose $\geq$, ekuacioni shndërrohet në një inekuacion me vlerë absolute.

Konsiderojmë inekuacionin $|x| < 2$.
Meqenëse vlera absolute e një numri paraqet distancën e atij numri nga origjina e boshtit numerik, të zgjidhim ekuacionin $|x| < 2$, dmth. të gjejmë ata numra realë, distanca e të cilëve nga origjina është më e vogël se 2 njësi.

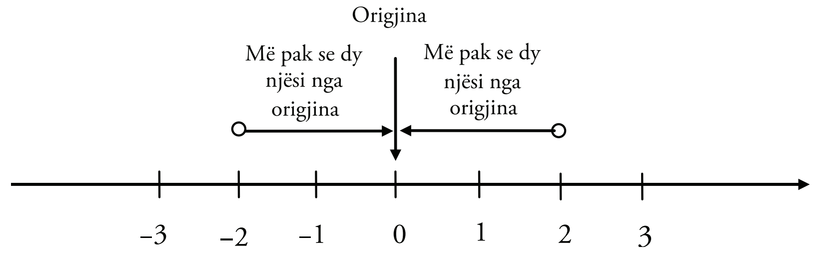


Fig. 1.7

Nga figura vërejmë se jobarazimin $|x| < 2$, e plotësojnë të gjithë numrat ndërmjet numrave -2 dhe 2. Bashkësia e zgjidhjeve të jobarazimit $|x| < 2$ është $\{x | -2 < x < 2\}$ ose në formë intervali $(-2,2)$. Intervali $(-2,2)$ grafikisht duket kështu

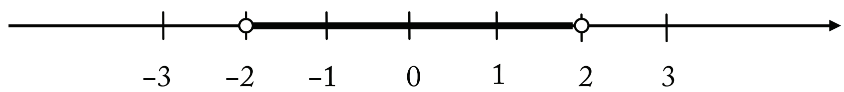


Fig. 1.8

■ $|x| < a$:

Nëse $a > 0$, inekuacioni është ekuivalent me $-a < x < a$

Nëse $a = 0$, bashkësi e zgjidhjeve është $\square$

Shënim. *Vetitë e mësipërme për inekuacionin* $|x| < a$ *vlejnë edhe kur simbolin për jobarazimin rigoroz* $<$ *(më i vogël) e zëvendësojmë me simbolin për jobarazimin e butë* $\leq$ *(më i vogël ose baras), dmth. jobarazimi* $|x| \leq a$ është ekuivalent me $-a \leq x \leq a$.

■ Rastet e mundshme të inekuacionit $|x| < a$:

Nëse $a > 0$, inekuacioni është ekuivalent me $-a < x < a$

Nëse $a = 0$, bashkësi e zgjidhjeve është $\square$

Zgjidhja e inekuacionit $|x| < a$:

1. Shprehjet që përmbajnë vlerë absolute, i grupojmë në një term.
2. Shkruajmë inekuacionin ekuivalent (që përmban tre terma).
3. Zgjidhim inekuacionin.

Shembull 1. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|x| - 3 < -2$. Paraqiteni atë në formë intervali dhe në formë grafike.

$|x| - 3 < -2$ — të dyja anëve të inekuacionit u a shtojmë numrin

$|x| < 1$ — shkruajmë inekuacionin ekuivalent

$-1 < x < 1$

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është $\{x \mid -1 < x < 1\}$ ose në formë të intervalit $(-1,1)$ ose në formë grafike, fig. 1.9.

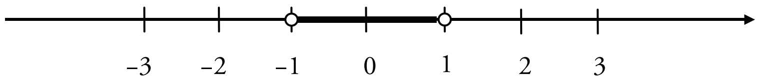


Fig. 1.9

Shembull 2. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|x+3| \leq 6$. Paraqiteni atë në formë intervali dhe në formë grafike.

$|x + 3| \leq 6$ — shkruajmë inekuacionin ekuivalent

$-6 \leq x + 3 \leq 6$ — të tre termave të inekuacionit ua shtojmë numrin -3

$-9 \leq x \leq 3$

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është $\{x \mid -9 \leq x \leq 3\}$ ose në formë të intervalit $[-9,3]$ ose në formë grafike, fig.1.10.

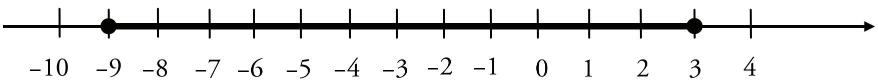


Fig.1 .10

Shembull 3. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|3x-4| < 5$. Paraqiteni atë në formë intervali dhe në formë grafike.

$|3x - 4| < 5$ — shkruajmë inekuacionin ekuivalent

$-5 < 3x - 4 < 5$ — të tre termave të inekuacionit ua shtojmë numrin 4

$-1 < 3x < 9$ — pjesëtojmë inekuacionin me numrin 3

$-\frac{1}{3} < x < 3$

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është $\left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 3\right\}$ ose në formë të intervalit $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ ose në formë grafike, fig.1.11.

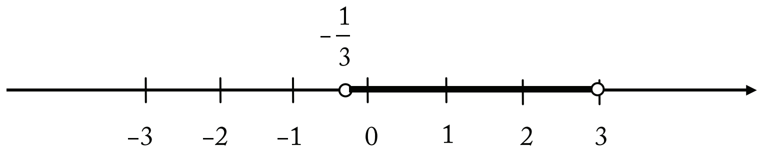


Fig.1 .11

Shembull 4. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|5-2x| \le 3$. Paraqiteni ate në formë intervali dhe në formë grafike.

$\lvert 5-2x \rvert \le 3$	shkruaimë inekua cionin ekuivalent
$-3 \le 5-2x \le 3$	të tre termave të inekuacionit ua shtojmë numrin −5
$-8 \le -2x \le -2$	pjes ë tojmë inekuacionin me numrin −2. Në këtë rast simbolet e jobarazimeve ndërrojnë kahjet
$4 \ge x \ge 1$	
$1 \le x \le 4.$	

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është $\{x \mid 1 \le x \le 4\}$ ose në formë të intervalit $[1,4]$ ose në formë grafike, fig.1.12.

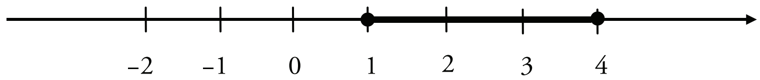


Fig.1 .12

Shembull 5. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|7x-4| \le -5$. Meqenëse vlera absolute e një numri (shprehjeje) nuk mund të jetë numër negativ, bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është ϕ, dmth. inekuacioni nuk ka zgjidhje.

Inekuacionet e formës $|x| > a$. Konsiderojmë inekuacionin

$$|x| > 2.$$

Meqenëse vlera absolute e një numri paraqet distancën e atij numri nga origjina e boshtit numerik, të zgjidhim ekuacionin $|x| > 2$, dmth. të gjejmë ata numra realë, distanca e të cilëve nga origjina është më e madhe se 2 njësi.

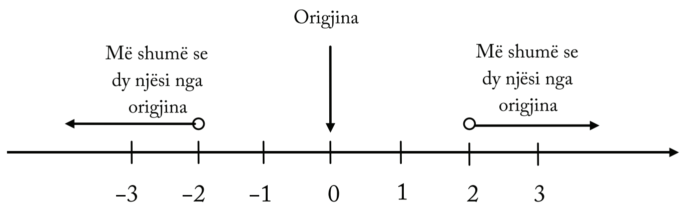


Fig.1 .13

Nga figura vërejmë se jobarazimin $|x| > 2$, e plotësojnë të gjithë numrat që janë më të vegjël se -2 dhe më të mdhenjë se 2. Bashkësia e zgjidhjeve të jobarazimit $|x| > 2$ është $\{x \mid x < -2 \quad \text{ose} \quad x > 2\}$ ose në formë intervali $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$. Grafikisht, fig.1.14.

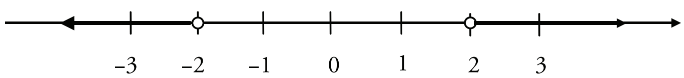


Fig.1 .14

$|x| > a$:

Për ndonjë numër realë x dhe $a > 0$, është ekuivalent me $x < -a$ *ose* $x > a$
Me fjalë: Nëse $|x| > a$, numri x është më i vogël se $-a$ ose më i madh se a

Shënim. *Vetitë e mësipërme për inekuacionin* $|x| > a$ *vlejnë edhe kur simbolin për jobarazimin rigoroz* $>$ (është më i madhë) e zëvendësojmë me simbolin për jobarazimin e butë $\geq$ (është më i madh ose baras), *dmth. jobarazimi* $|x| \geq a$ është ekuivalent me $x \leq -a$ *ose* $x \geq a$.

Rastet e mundshme të inekuacionit $|x| > a$:

Nëse $a > 0$, inekuacioni është ekuivalent me $x < -a$ ose $x > a$

Nëse $a < 0$, bashkësi e zgjidhjeve është $\square$

Zgjidhja e inekuacionit $|x| > a$:

1. Shprehjet që përmbajnë vlerë absolute i grupojmë në një term..
2. Shkruajmë inekuacionet (ekuivalent të lidhura me lidhëzen ose).
3. Zgjidhim inekuacioninet.

Shembull 1. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|x+2| > 2$. Paraqiteni atë në formë intervali dhe në formë grafike. $x < -4$ ose $x > 0$

$|x+2| > 2$ — shkruajmë dy inekuacioninet ekuivalente

$x+2 < -2$ ose $x+2 > 2$ — në të dyja inekuacionet të dyja anëve ua shtojmë numrin

$x < -4$ ose $x > 0$

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është $\{x \mid x < -4 \text{ ose } x > 0\}$ ose në formë të intervalit $(-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$ ose në formë grafike, fig.1.15.

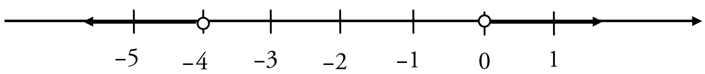
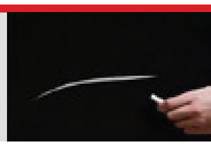


Fig.1 .15



Shembull 2. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|3x-4|\geq 2$. Paraqiteni atë në formë intervali dhe në formë grafike.

$|3x - 4| \geq 2$ — shkruajmë dy inekuacioninet ekuivalente

$3x - 4 \leq -2$ ose $3x - 4 \geq 2$ — në të dyja inekuacionet të dyja anëve ua shtojmë numrin 4

$3x \leq 2$ ose $3x \geq 6$ — të dyja inekuacionet i pjesëtojmë me 3

$x \leq \frac{2}{3}$ ose $x \geq 2$

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është $\left\{x \,|\, x \leq \frac{2}{3} \text{ ose } x \geq 2\right\}$ ose në formë të intervalit $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ ose në formë grafike, fig.1.15.

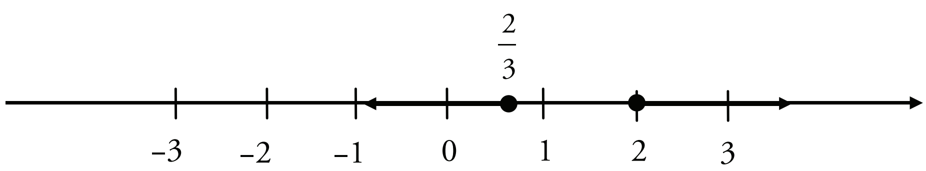


Fig.1 .16

Shembull 3. Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $|4x-5|+8 \geq 3$.

$|4x-5|+8 \geq 3$ — të dyja anëve të jobarazimit ua shtojmë numrin −8

$|4x-5| \geq -5$

Meqenëse jobarazimi i fundit është i vërtetë për çdo numër real x, atëherë bashkësia e zgjidhjeve të jobarazimit të dhënë është □.

Detyra për punë të pavarur

Të zgjidhen inekuacionet me vlerë absolute:

1. $|x| < 4.$ **2.** $|x| \leq 3.$ **3.** $|x| \geq 2.$

4. $|x| > 4.$ **5.** $|x| - 2 \leq 1.$ **6.** $|x| - 1 < 2.$

7. $|x| + 3 > 8.$ **8.** $|x| + 5 \geq 7.$ **9.** $|3x-4| < 6.$

10. $|2x+5| \leq 4.$ **11.** $|5x-3| \geq 7.$ **12.** $|4-3x| \leq 13.$

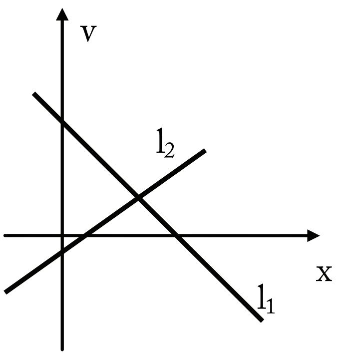
13. $|6-3x| < 12.$ **14.** $|4x-9| < 0.$ **15.** $|3x+6| \leq -1.$

16. $|4x-6| \geq -2.$ **17.** $|7x-4|+5 < 7.$ **18.** $|1-3x| - 4 \geq 3.$

19. $4 + |3x+1| > 6.$ **20.** $4 + |3-2x| \geq 7.$ **21.** $|3.2x - 12.2| > 13.4.$

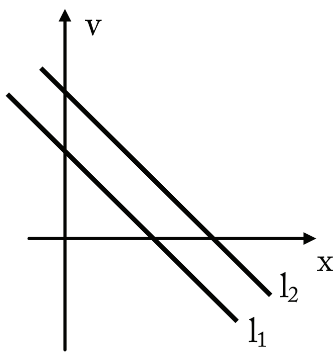
Zgjidhja e sistemit të ekuacioneve lineare me dy ndryshore

Metoda grafike: Secili nga ekuacionet e sistemit të ekuacioneve lineare me dy ndryshore paraqet një ekuacion linear me dy ndryshore. Më parë treguam se ekuacioni linear me dy ndryshore grafikisht paraqet një drejtëz në rrafsh. Prandaj një sistem i dy ekuacioneve lineare me dy ndryshore grafikisht paraqet dy drejtëza në rrafsh, të cilat po i shënojmë më l_1 dhe l_2. Nëse:
1° Drejtëzat l_1, l_2 priten, fig.10.1. Sistemi i ekuacioneve ka vetëm një zgjidhje. Zgjidhja e sistemit është çifti i renditur i koordinatave të pikës prerëse. Në këtë rast sistemi quhet *i mundshëm dhe i caktuar*.
2° Drejtëzat l_1, l_2 janë paralele, fig.10.2. Sistemi nuk ka zgjidhje. Në këtë rast sistemi quhet *i pamundshëm*.
3° Drejtëzat l_1, l_2 përputhen, fig.10.3. Sistemi ka pakufi shumë zgjidhje, Në këtë rast sistemi quhet *i mundshëm dhe i pacaktuar*.



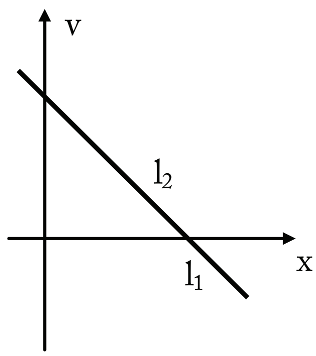
Një zgjidhje
drejtëzt priten në një pikë

Fig. 10.1



Nuk ka zgjidhje
drejtëzat janë paralele

Fig. 10.2



Pakufi zgjidhje
drejtëzat përputhen

Fig. 10.3

Shembull 1. Të zgjidhim sistemin e ekuacioneve lineare

$$4x - y = 1$$
$$x + y = 4.$$

Meqenëse drejtëza është e përcaktuar në mënyrë të vetme me dy pika, në vazhdim për të paraqitur grafikisht një drejtëz do të gjejmë dy pika të saj. Për lehtësi në disa raste do të gjejmë pikat e prerjes së saj me boshtet koordinative.

Drejtëza $4x - y = 1$: Për $x = 0$; $4 \cdot 0 - y = 1$ Për $y = 0$; $4x + 0 = 1$

$$-y = 1 \qquad 4x = 1$$

$$y = -1 \qquad x = \frac{1}{4}.$$

Pra, drejtëza $4x - y = 1$ e pret boshtin Ox në pikën me koordinata $\left(\frac{1}{4},0\right)$, kurse boshtin Oy në pikën me koordinata (0,-1.)

Drejtëza $x + y = 4$: Për $x = 0;\ 0 + y = 4$, $y = 4$ Për $y = 0;\ x + 0 = 4$, $x = 4$

Pra, drejtëza $x + y = 4$ e pret boshtin Ox në pikën me koordinata (4,0)., kurse boshtin Oy në pikën me koordinata (0,4).

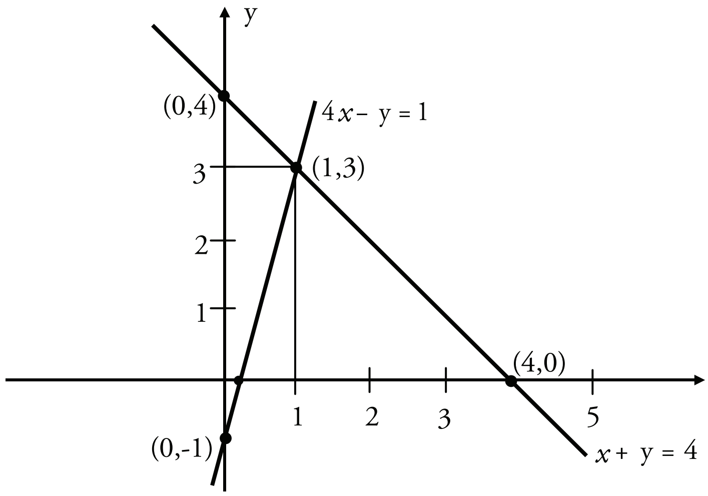


Fig. 10.4

Nga figura vërejmë se drejtëzat priten në pikën me koordinata (1,3), d.m.th. zgjidhja e sistemit të dhënë është (1,3).
Shembull 2. Të zgjidhim sistemin e ekuacioneve lineare

$x + y = 3$

$x + y = 2$

Drejtëza $x + y = 3$: Për $x = 0;\ 0 + y = 3$, $y = 3$ Për $y = 0;\ x + 0 = 3$, $x = 3$

Pra, drejtëza $x + y = 3$ e pret boshtin Ox në pikën me koordinata (3,0), kurse boshtin Oy në pikën me koordinata (0,3).

Drejtëza $x + y = 2$: Për $x = 0;\ 0 + y = 2$, $y = 2$ Për $y = 0;\ x + 0 = 2$, $x = 2$

Pra, drejtëza $x + y = 2$ e pret boshtin Ox në pikën me koordinata (2,0).kurse boshtin Ox në pikën me koordinata (0,2).
Vërejmë se drejtëzat janë paralele, prandaj sistemi i dhënë nuk ka zgjidhje.

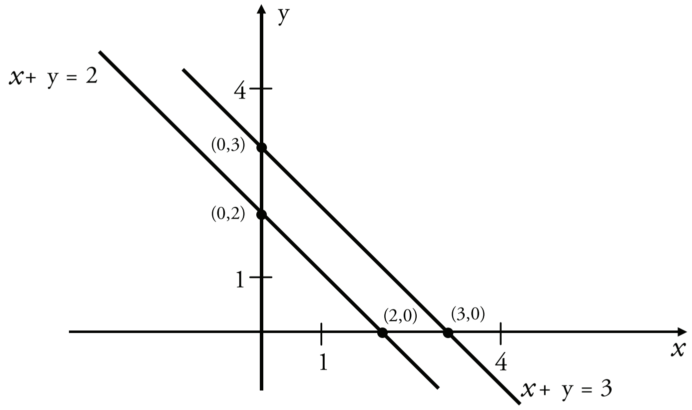


Fig. 10.5

Shembull 3. Të zgjidhim sistemin e ekuacioneve lineare
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4. \end{aligned}$$

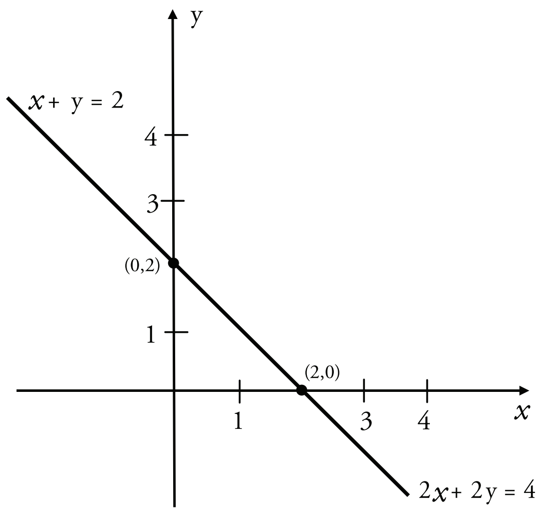


Fig. 10.6

Drejtëza $x + y = 2$: Për $x = 0$; $0 + y = 2$ Për $y = 0$; $x + 0 = 2$

$y = 2$ $x = 2$.

Pra, drejtëza $x + y = 2$ e pret boshtin Ox në pikën me koordinata (2,0), kurse boshtin Ox në pikën me koordinata (0,2).

Drejtëza $2x + 2y = 4$: Për $x = 0$; $2 \cdot 0 + 2y = 4$ Për $y = 0$; $2x + 2 \cdot 0 = 4$

$2y = 4$ $2x = 4$

$y = 2$ $x = 2$

Pra, drejtëza $2x + 2y = 4$ e pret boshtin Ox në pikën me koordinata (2,0), kurse boshtin Ox në pikën me koordinata (0,2).

Vërejmë se drejtëzat kanë dy pika të përbashkëta, prandaj ato përputhen. Rrjedhimisht sistemi ka pakufi shumë zgjidhje. Koordinatat e çdo pike të drejtëzës paraqesin zgjidhje të sistemit.

Shembull 4. Të zgjidhim sistemin e ekuacioneve lineare $\begin{aligned}4x - y &= 0\\ x + y &= 5.\end{aligned}$

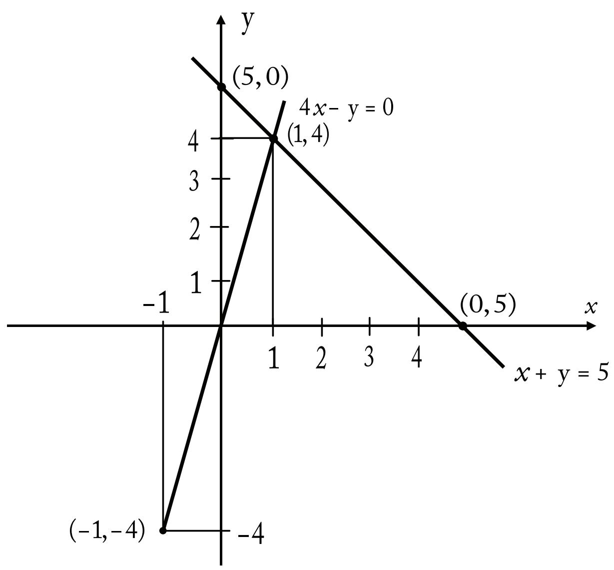


Fig. 10. 7

Drejtëza $4x - y = 0$: Për $x = 0;\ \ 0 - y = 0$

$$y = 0.$$

Pra, drejtëza $4x - y = 0$ kalon nëpër origjinën e sistemit koordinativ. Caktojmë edhe një pikë tjetër të drejtëzës.

$$\text{Për } x = -1,\quad 4(-1) - y = 0$$
$$-4 - y = 0$$
$$y = -4.$$

Pra, drejtëza kalon nëpër pikën me koordinata $(-1,-4)$.

Drejtëza $x + y = 5$: $x = 0;\ \ 0 + y = 5$ Për $y = 0;\ \ x + 0 = 5$

$$y = 5 \qquad\qquad x = 5$$

Pra drejtëza $x + y = 5$ e pret boshtin Ox në pikën me koordinata (5,0) kurse boshtin Oy në pikën me koordinata (0,5)

Nga figura vërejmë se drejtëzat priten në pikën me koordinata (1,4). Rrjedhimisht çifti i renditur (1,4) është zgjidhje e sistemit të dhënë.

Metoda e eliminimit: Derisa gjatë zgjidhjes së sistemit me metodën grafike na paraqiten vështirësi në leximin e zgjidhjeve nga grafiku, na imponohet të përdorim metoda të tjera algjebrike për zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare me dy ndryshore. Në shembujt e mëposhtëm do të ilustrojmë metodën e eliminimit të të panjohurave.

Shembull 1. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare $\begin{aligned}4x - 3y &= 5\\ 2x + 3y &= 7.\end{aligned}$

Ekuacionet e sistemit i mbledhim anëpëranë, kemi:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 2x + 3y &= 7 \\ \hline 6x &= 12 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Tani në njërin nga ekuacionet e sistemit (p.sh. në të parin) zëvendësojmë 2 në vend të x dhe kemi:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 4 \cdot 2 - 3y &= 5 \\ 8 - 3y &= 5 \\ -3y &= -3 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Pra, çifti i renditur $(2,1)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë.
Prova: Ekuacioni i parë Ekuacioni i dytë

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 5\,. \\ 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 &= 5 \\ 8 - 3 &= 5 \\ 5 &= 5 \quad \boxed{\text{e saktë}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 &= 7 \\ 4 + 3 &= 7 \\ 7 &= 7 \quad \boxed{\text{e saktë}} \end{aligned}$$

Shembull 2. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ 3x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

Kemi:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \quad \text{Shumëzojmë me } 2 \longrightarrow & 4x - 6y &= 4 \\ 3x + 2y &= 3 \quad \text{Shumëzojmë me } 3 \longrightarrow & 9x + 6y &= 9 \end{aligned} \quad \boxed{\text{mbledhim anëpëranë}}$$

Tani vlerën e gjetur x=1 e zëvendësojmë në njërin nga ekuacionet e sistemit (p.sh. në ekuacionin e dytë) dhe kemi:

$$\text{Për } x = 1; \qquad \begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ 3 \cdot 1 + 2y &= 3 \\ 3 + 2y &= 3 \\ 2y &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Pra, çifti i renditur $(1,0)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë.

Shembull 3. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} 3x-4y&=1\\ 6x-8y&=-5. \end{aligned}$$

Kemi:

$$\begin{array}{lcr} 3x-4y=1 & \xrightarrow{\text{shumëzojmë me} -2} & -6x+8y=-2 \\ 6x-8y=-5 & \xrightarrow{\text{përshkruajmë}} & 6x-8y=-5 \\ \hline & & 0=-7 \end{array}$$

mbledhim anëpëranë

e pa saktë

Pra, sistemi i dhënë nuk ka zgjidhje, është i pamundshëm.

Shembull 4. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} 3x-2y&=1\\ 9x-6y&=3. \end{aligned}$$

Kemi:

$$\begin{array}{lcr} 3x-2y=1 & \xrightarrow{\text{shumëzojmë me} -3} & -9x-6y=-3 \\ 9x-6y=3 & \xrightarrow{\text{përshkruajmë}} & 9x-6y=3 \\ \hline & & 0=0 \end{array}$$

mbledhim anëpëranë

e saktë

Pra, sistemi i dhënë ka pakufi shumë zgjidhje, është i mundshëm dhe i pacaktuar.

Shembull 5. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x+\frac{2}{5}y&=\frac{9}{10}\\ \frac{1}{2}x+\frac{6}{5}y&=\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Në fillim ekuacionet e sistemit i transformojmë në mënyrë që ato të lirohen nga thyesat. Për këtë të dy ekuacionet i shumëzojmë me numrin 10. Merret sistemi i ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} 15x+4y&=9\\ 5x+12y&=3 \end{aligned}$$

Tash

$$\begin{array}{lcr} 15x+4y=9 & \xrightarrow{\text{përshkruajmë}} & 15x+4y=9 \\ 5x+12y=3 & \xrightarrow{\text{shumëzojmë me} -3} & -15x-36y=-9 \\ \hline & & -32y=0 \\ & & y=0 \end{array}$$

mbledhim anëpëranë

Tani vlerën e gjetur $y=0$ e zëvendësojmë në njërin nga ekuacionet e sistemit (p.sh. në ekuacionin e parë) dhe kemi:

Për $y=0$; $15x+4\cdot 0=9$

$$15x=9$$

$$x=\frac{3}{5}.$$

Pra, çifti i renditur $\left(\frac{3}{5},0\right)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë.

Pra për zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare me metodën e eliminimit zbatojmë këtë procedurë:

I. Shkruajmë secilin ekuacion të sistemit në formë standarde.
II. Shumëzojmë njërin ekuacion (ose të dy ekuacionet) nëse është e nevojshme me një numër, ashtu që të fitohen koeficientë të kundërt pran njërës ndryshore.
III. Mbledhim ekuacionet e sistemit dhe fitohet një ekuacion me një ndryshore.
IV. Zgjidhjen e fituar në III e zëvendësojmë në njërin nga ekuacionet e sistemit fillestar dhe e zgjidhim atë sipas variablit tjetër.

Nëse në III fitohet :
a) barazi e pasaktë, sistemi është i pamundshëm (nuk ka zgjidhje).
b) identitet $0=0$, sistemi është i mundshëm dhe i pacaktuar (ka pakufi shumë zgjidhje).

Metoda e zëvendësimit. Metoda e zëvendësimit zbatohet kështu: Nga njëri ekuacion gjejmë njërën ndryshore në varësi nga tjetra e pastaj atë e zëvendësojmë në ekuacionin tjetër. Kështu gjejmë njërën ndryshore.

Shembull 1. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare
$$\begin{aligned} -3x + y &= 2 \\ 2x + 5y &= -7. \end{aligned}$$

Nga ekuacioni i parë $-3x + y = 2$ gjejmë se $y = 3x + 2$. Këtë e zëvendësojmë në ekuacionin e dytë, kemi
$$\begin{aligned} 2x + 5(3x+2) &= -7 \\ 2x + 15x + 10 &= -7 \\ 17x &= -17 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Tani vlerën e gjetur $x = -1$ e zëvendësojmë në $y = 3x + 2$ dhe kemi:
$$\text{Për } x = -1 \quad \begin{aligned} y &= 3x + 2 \\ y &= 3(-1) + 2 \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Pra, çifti i renditur $(-1,-1)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë.
Shembull 2. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare
$$\begin{aligned} 5x - y &= 8 \\ 2x - y &= -4. \end{aligned}$$

Nga ekuacioni i dytë i sistemit, gjejmë se $y = 2x + 4$. Këtë e zëvendësojmë në ekuacionin e parë, kemi:
$$\begin{aligned} 5x - y &= 8 \\ 5x - (2x+4) &= 8 \\ 5x - 2x - 4 &= 8 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Vlerën x=4 e zëvendësojmë në $y = 2x + 4$ dhe gjejmë $y = 2 \cdot 4 + 4 = 12$. Pra çifti i renditur $(4,12)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë.

Shembull 3. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1$$
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2.$$

Në fillim zëvendësojmë $\frac{1}{x} = p$ dhe $\frac{1}{y} = q$. Sistemi i dhënë merr formën

$$2p - 3q = 1$$
$$p + 2q = 2.$$

Nga ekuacioni i dytë në sistemin e fundit gjejmë se $p = -2q + 2$. Këtë e zëvendësojmë në ekuacionin e parë dhe kemi:

$$2(-2q + 2) - 3q = 1$$
$$-4q + 4 - 3q = 1$$
$$-7q = -3$$
$$q = \frac{3}{7}.$$

Tani vlerën $q = \frac{3}{7}$ e zëvendësojmë në $p = -2q + 2$ dhe kemi:

$$p = -2 \cdot \frac{3}{7} + 2$$
$$p = -\frac{6}{7} + \frac{14}{7}$$
$$p = \frac{8}{7}.$$

Në fund nga $\frac{1}{x} = p$ dhe $\frac{1}{y} = q$ rrjedh se $x = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{8}{7}} = \frac{7}{8}$ dhe $y = \frac{1}{q} = \frac{7}{3}$. Pra çifti i renditur $\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{3}\right)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë.

Pra, për zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare me metodën e zëvendësimit zbatojmë këtë procedurë:

I. Zgjidhim njërin ekuacion sipas njërës së ndryshor (nëse koeficienti pranë ndonjërës ndryshore është 1 ose −1 zgjidhim sipas asaj).
II. Shprehjen e gjetur në I e zëvendsojmë në ekuacionin tjetër dhe e zgjidhim atë sipas ndryshores së mbetur.
III. Zgjidhjen e fituar në II e zëvendësojmë në njërin nga ekuacionet e sistemit fillestar dhe e zgjidhim ate sipas variablit tjetër.
IV. Nëse në II fitohet:
a) barazim i pasaktë, atëherë sistemi është i pamundshëm, d.m.th. sistemi nuk ka zgjidhje.
b) identitet, atëherë sistemi është i mundshëm dhe i pacaktuar, d.m.th. sistemi ka pakufi shumë zgjidhje.

DETYRA PËR PUNË TË PAVARUR

1. Me metodën grafike zgjidhni sistemet e ekuacioneve:

a) $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x + y = 5. \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1. \end{cases}$

2. Me metodën e eliminimit zgjidhni sistemet e ekuacioneve:

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 3y = 1. \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 6x - 5y = 2. \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4. \end{cases}$

3. Me metodën e zëvendësimit zgjidhni sistemet e ekuacioneve:

1) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + y = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 5y = -4. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + y = 3 \\ 2x + 5y = -13. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ x + 2y = -2. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = 4 \\ x - \frac{1}{3}y = -1. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{2}x - y = 3. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \frac{1}{6}x + y = -7 \\ \frac{2}{3}x + y = 2. \end{cases}$

4. Duke zgjedhur vetë metodën, zgjidhni sistemet e ekuacioneve.

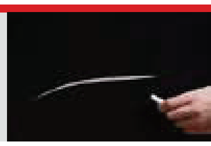
1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 4y = 10 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x - 3y = -5. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - y = 2. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 8x - y = -4 \\ 4x + 7y = -32. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{12}. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y = \frac{9}{10} \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}y = \frac{3}{10}. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \frac{5}{2}x - y = -\frac{17}{2} \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 1. \end{cases}$

5. Të zgjidhen sistemet:

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -5. \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 0 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 0 \\ \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = -1. \end{cases}$



Literatura

1. Kurtis Meredith, Jeannie Steele: Klasat e mrekullisë dhe mençurisë; leximi, shkrimi dhe të menduarit kritik për shekullin 2, Corwin, 2011
2. Ministria e Arsimit, Shkencës dhe Teknologjisë, Korniza e kurrikulit të Kosovës, MAShT, 2011
3. Miranda Mete, Tatjana Nebiaj, Libër mësuesi për tekstin Matematika 8, Albas, 2009
4. Jeff Zwiers: Zhvillimi i shprehive të të menduarit në klasat 6-12, Shoqata Ndërkombëtare e Leximit, 2006
5. Bardhyl Musai dhe të tjerë: Mësimdhënia dhe të nxënët ndërveprues; Shkencat e natyrës dhe matematika, Qendra për Arsim Demokratik, 2005
6. Alan Crawford dhe të tjerë: Strategjitë e mësimdhënies dhe të nxënit për klasat mendimtare, Instituti për Shoqëri të Hapur, 2005
7. David Capewell dhe të tjerë: Matematika për klasën 8, OUP Oxford, 2005.
8. David Capewell dhe të tjerë: Matematika për klasën 8, OUP Oxford, 2004
9. Stephen Adam: Përdorimi i rezultateve të të nxënit, Conference paper "United Kindom Bologna Seminar, 2004
10. Eda Vula, Melinda Mula: Strategji të reja të mësimdhënies dhe të nxënit në lëndën e matematikës (dispensë e zhvilluar në kuadër të projektit TEMPUS, 2004)
11. Melinda Mula dhe të tjerë: Modele të mësimdhënies sipas strukturës ERR, Qendra për Arsim e Kosovës, 2003
12. Bardhyl Musai: Metodologjia e mësimdhënies, Pegi, 2003
13. Kurtis Meredith, Jeannie Steele dhe Charles Temple: Udhëzuesit e programit "Zhvillimi i mendimit kritik gjatë leximit dhe shkrimit", Autorët, 1998
14. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 9, Dukagjini 2007
15. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 8, Dukagjini 2005
16. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 7, Dukagjini 2004
17. Ramadan Zejnullahu dhe të tjerë: Matematika për klasën e 6, Dukagjini 2004